

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ

Қолжазба
құқығында

БАЙСБАЕВА ОРАЛХАН БАЙТИЛЕУОВНА

**Бейстационар сфералық дененің тартылыс өрісіндегі үш өсті
бейстационар дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеу**

6D060300-Механика

Философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін
дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілері:
физико-математика ғылымдарының
докторы, профессор М.Ж.Минглибаев

физико-математика ғылымдарының
докторы, профессор А.Н. Прокопеня
(Warsaw University of Life Sciences, Warsaw, Poland)

Алматы, 2025

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР.....	3
КІРІСПЕ.....	4
1 МАССАСЫ, ӨЛШЕМІ АЙНЫМАЛЫ ЖӘНЕ ПІШІНІ ТҰРАҚТЫ КӨЛЕМДІ ДЕНЕНІҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСІ.....	10
1.1 Массасы, өлшемі айнымалы және пішіні тұрақты дененің инерция эллипсоиды.....	10
1.2 Массасы айнымалы денелердің күштік функциясы.....	16
1.3 Массасы мен өлшемі айнымалы үш өсті дененің гравитациялық өрісі....	18
2 БЕЙСТАЦИОНАР ҮШ ӨСТІ ДЕНЕНІҢ БЕЙСТАЦИОНАР СФЕРАЛЫҚ ДЕНЕНІҢ ӨРІСІНДЕГІ ІЛГЕРІЛМЕЛІ-АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ТЕНДЕУЛЕРІ.....	26
2.1 Бейстационар үш өсті дененің абсолютті координаттар жүйесіндегі қозғалыс тендеуі.....	26
2.2 Бейстационар үш өсті дененің салыстырмалы координаттар жүйесіндегі қозғалыс тендеуі.....	29
2.3 Ұйытқымаған ілгерілмелі-айналмалы қозғалысты Гамильтон-Якоби әдісімен интегралдау.....	32
2.4 Оскуляциялаушы Якоби элементтері аналогындағы ілгерілмелі-айналмалы қозғалыс тендеулері.....	40
2.5 Делоне-Андруайе элементтерінің аналогындағы ілгерілмелі-айналмалы қозғалыс тендеулері.....	40
2.5.1 Делоне-Андруайе элементтерінің аналогындағы ұйытқымаған ілгерілмелі қозғалыс тендеулері.....	42
2.5.2 Делоне-Андруайе элементтерінің аналогындағы ұйытқымаған айналмалы қозғалыс тендеулері.....	43
2.6 Оскуляциялаушы элементтер арқылы күштік функцияны жіктеу.....	45
2.7 Резонанс болмаған жағдайда ұйытқыған қозғалыстың эволюциялық тендеулерін орташалау және ғасырлық ұйытқу тендеулерін алу.....	50
3 ҒАСЫРЛЫҚ ҰЙЫТҚУ ТЕНДЕУЛЕРІН САНДЫҚ ТӘСІЛМЕН ШЕШУ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІН АЛУ.....	55
3.1 Өлшемсіз айнымалылардағы қозғалыс тендеулері.....	55
3.2 Коши есебінің бастапқы шарттары.....	63
3.3 Ғасырлық ұйытқу тендеулерінің графиктері: массасы тұрақты және айнымалы жағдайлардың салыстырмалы талдауы.....	64
ҚОРЫТЫНДЫ.....	69
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	70
ҚОСЫМША	74

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

P_1, P_2	массалары айнымалы денелер
m_1, m_2	P_1, P_2 денелерінің айнымалы массалары
m_{10}, m_{20}	t_0 уақыттың бастапқы мезетіндегі P_1, P_2 денелердің массалары
A, B, C	екі өсті дененің бас инерция моменттері
U	күштік функция
f	гравитация тұрақтысы
K	кинетикалық энергия
μ	келтірілген масса
$a, e, \omega, \Omega, i, \phi(\tau)$	орбита элементтер аналогтары
a	үлкен жарты өс аналогы
e	эксцентриситет аналогы
ω	перицентр аргументінің аналогы
Ω	жарқырау түйіні бойлығының аналогы
i	көлбеулік аналогы
$\Phi(\tau)$	$[\nu(t)]^{-2}$ функциясының алғашқы функциясы
π	перицентр бойлығы
n	Кеплерлік орташа қозғалыстың аналогы
L, G, H, l, g, h	Делоне элементтер аналогтары
L', G', H', l', g', h'	Андуайе элементтер аналогтары
$M_\odot$	Күн массасы

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы

Диссертациялық жұмыс массалары мен өлшемдері айнымалы, пішіні тұрақты екі дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеуге бағытталған. Қозғалыстың дифференциалдық теңдеулері интегралданбайтын болғандықтан мәселені ұйтқу теориясының аясында зерттейміз.

Классикалық аспан механикасы ғарыштық денелерді материалдық нүкте ретінде қарастырады. Өзара Ньютон заңы бойынша гравитацияланушы еркін материалдық нүктелер жүйесінің аналитикалық механикасы өте жақсы дамыған және осы күнге дейін өз құнын жоғалтқан жоқ. Оның ерекшелігі денелердің ілгерілемелі-айналмалы қозғалыстарын өзара әсерін ескере отырып қарастыруда болып табылады. Бірақ та, аспан механикасының кейбір мәселелерін зерттегенде классик ғалымдардың өздері де (И.Ньютон, Л. Эйлер, Ж. Лагранж және басқалары) гравитацияланушы көп материалдық нүктелер есебінің шектеулі қойылым екенін түсінген, яғни аспан денелерін материалдық нүкте ретінде қарастыру ол денелердің динамикалық эволюциясын зерттеуде кейбір физикалық проблемалардың сәйкес математикалық моделі болмайтынын атап көрсеткен.

Жалпы астрономиядағы бақылауға қарап аспан денелері тек сфералық қана емес, сонымен қатар абсолютті қатты дене болып табылмайтыны бүгінгі күнде жақсы белгілі. Бұл жағдай аспан механикасының белгілі классикалық моделі - екі дене мәселесіне де қатысты. Классикалық екі дене есебінде өзара әрекеттесетін екі нүктелік массалар немесе массасы сфералық симметриялы түрде үлестірілетін өлшемдері шекті екі дене жағдайында интегралданады және оның жалпы шешімі белгілі.

1687 жылы Ньютонның негізгі өлмес жұмысы «Натурфилософияның математикалық принциптері» атты еңбегі алғаш рет латын тілінде жарияланды, онда «Орталық күштер өзара тартылған денелердің қозғалысы туралы» XI бөлімде екі дене мәселесі және көп дене мәселесі қатысты жалпы ережелер жазылған. Ньютон тарту нүктесінен арақашықтығына пропорционал өсетін күшке көп көңіл бөлді және тартылған дененің кез келген пішіні үшін мұндай күштердің теңгеруші күші оның ауырлық центрінен өтетінін дәлелдеді.

Л.Эйлер еңбектерінде қатты дененің қозғалысын сипаттаудың кинематикалық принциптерін атап көрсетті, лездік айналу өсінің бар екенін дәлелдеді және динамикалық теңдеулердің, материалдық нүктенің қозғалысы мен қатты дененің айналу қозғалысының нұсқаларын берді.

Ж.Лагранж Жер мен Айдың сыртқы пішінінің әсерін зерттеуге бірқатар еңбектерін арнады. Ол Айдың байқалған ғасырлық үдеуін тек өзара әрекеттесетін денелердің пішінінің әсерімен түсіндіруге болмайтынын көрсетті.

Абсолютті қатты дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы туралы жалпы есептің шешімін табуға көптеген орыс ғалымдары Ю.В. Баркин [13-17], В.В. Белецкий [4-6], В.В. Видякин [9-12], Н.И.Гамарник, В.Г.Демин, Г.Н.

Дубошин [1-3], С.Г.Журавлев [18-20], В.Т. Кондурарь, Г.Ф. Осипова, Т.К. Шинкарик пен шетел ғалымдарына V.Gurta, P.B.Johnson, T.R. Kane, H. Kinoshita, P.K.Mishra, M. Pascal және т.б. үлес қосты. Қазақстандық ғалымдар Ержанов Ж.С.[21-23], А.А. Қалыбаев [24], Баймұхаметов А.А. және олардың шәкірттері аспан денелерінің қозғалысының ілгерілемелі және айналмалы теориясын кеңінен зерттеген.

XIX ғасырдың аяғына дейін аспан механикасында тек стационар аспан денелеріне қатысты есептер шешіліп келген. Айнымалы массасы бар екі дененің салыстырмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуін ең алғаш 1884 жылы Гильден [38] қолданған. Одан кейін бейстационарлы ғарыш денелерінің қозғалысын зерттеуде маңызды нәтижелер көрсеткен В.Г. Фесенков, Г.М. Идлис, Т.Б.Омаров [25-26], J.D.Hajidemetriou, Л.Г. Лукьянов, Е.Н. Поляхова, А.А. Беков [27-28], A.Deprit, L.Floria және т.б ғалымдардың жұмыстарын айтсақ болады.

Егер денелердің кем дегенде біреуі сфералық симметриялы болмаса, онда өзара гравитациялық әсерлесу денелердің геометриялық пішіні мен массаларының таралуына байланысты болғандықтан ол мәселені әлдеқайда күрделендіре түседі. Уақыт өткен сайын олардың массалары, өлшемдері, пішімдері мен дене ішінде массалар таралуы да өзгеріп отырады. Оған дәлел ретінде жұлдыздардың ішкі эволюциялық теориясына сәйкес жұлдыздардың дамуының әртүрлі сатысында жұлдыздардың белгілі бір сығылу мен созылуын келтірсек болады [34]. Мысалы, қызыл гигант кезеңіне өткенде жұлдыздар массасына қарай 10-100 есе өсуі мүмкін [35]. Әсіресе тығыз қос жұлдыздар жүйесінде құраушылардың пішімдері мен өлшемдерінің өзгеруі, массалардың тасымалдануы мен диссипация процесстері қарқынды жүреді [29-31,36-37]. Сәйкесінше олардың гравитациялаушы байланыстары айнымалы болып, ньютондық потенциал уақыттан айқын түрде тәуелді болады. Бұл факторлар олардың динамикалық эволюцияларына ерекше әсер етеді.

Омаров Т.Б. интенсивті корпускулалық сәулеленуі бар кең қос жұлдыздардың динамикасын зерттеді. Тартылатын шаңды заттың ішінде қозғалатын екі дененің мәселесі шешілді. Т.Б. Омаровпен қатар осыған ұқсас зерттеулерді Грецияда профессор Дж.Хаджи Деметриу жүргізген. Жұмыстардың нәтижесі параллелді түрде алынғандықтан динамикалық астрономия тарихында бұл жұмыстар «Омаров-Хаджи Деметриу элементтері» деген ұғыммен енді. Аспан механикасы саласындағы бұл құбылыстарды зерттеу галактикалық, жұлдыздық және планеталық жүйелердің динамикалық эволюциясының табиғатын тереңірек түсінуге мүмкіндік берді.

Орыс ғалымы М.Ю. Баркиннің [15] жұмысында массалар геометриясы өзгертін аспан денелерінің, соның ішінде Жердің, айналмалы қозғалысының ұйытқуларын зерттеуге арналған. Ол Андуайе және әсер-бұрыш айнымалыларындағы жаңа қозғалыс теңдеулерін қолданып, геопотенциал коэффициенттерінің маусымдық және ғасырлық вариацияларын ескеруге мүмкіндік беретін тәсіл ұсынған.

Бейстационар гравитацияланатын денелердің динамикалық әсерінің әртүрлі комбинациялары, мысалы, массаның, пішіннің, өлшемнің айнымалы болуы, гравитацияланатын жүйелердің эволюция жолдарының әртүрлілігін көрсетеді. Аспан механикасының аспектілерінде осы құбылыстарды зерттеу, галактикалық, жұлдызды, планеталық жүйелердің динамикалық эволюциясының табиғатын аша түседі.

Зерттеу жұмысының өзектілігі

Массасы, өлшемі айнымалы өзара гравитацияланатын екі дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеу мәселесі – өзекті және аз зерттелген мәселелердің бірі. Табиғи және жасанды бейстационар аспан денелерінің массалар центрінің ілгерілемелі қозғалысы мен сол денелердің өзіндік масса центрінің маңайындағы айналмалы қозғалысын біріктіре зерттеу осы мәселені қамтиды.

Жұмыстың мақсаты - үш өсті дененің массасы мен өлшемдерінің айнымалылығының бейстационар сфералық дененің тартылыс өрісіндегі оның ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының эволюциясына әсерлерін анықтау.

Зерттеу міндеттері

1. Бинарлы гравитациялаушы жүйелерде есептің физикалық қойылымын қарастыру, аспан-механикалық жорамалдар, зерттеу объектісінің математикалық моделін құру.

2. Есептегі күштік функцияның әр түрлі жуықтаулардағы қозғалыс теңдеулері мен оскуляциялаушы элементтердің әртүрлі жүйелерінде бейстационар сфералық дененің тартылыс өрісіндегі бейстационар үш өсті дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының теңдеуін алу. Ұйытқытушы функцияны жіктеу.

3. Эволюциялық теңдеулерді алу және талдау. Жуық аналитикалық шешімдерді табу. Сандық шешімдермен салыстыру.

4. Орбиталдық қозғалыс пен массалар центрі айналасындағы айналмалы қозғалысқа үш өсті дененің массасы мен өлшемдерінің айнымалылығының динамикалық әсерін талдау. Шешімдерді визуализациялау.

Зерттеу нысаны

Үш өсті бейстационар дененің бейстационар сфералық дененің тартылыс өрісіндегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы.

Зерттеу әдістері Гамильтон-Якоби әдісі, әртүрлі айнымалылар мен әртүрлі пішімдегі Ұйытқу теориясы, соның ішінде, канондық ұйытқу теориясы, дифференциалдық теңдеулердің гамильтондық жүйе теориясының математикалық аппараты, материалдық нүктелер жүйесінің аналитикалық геометриясы, Гаусс орташалау әдісі, Mathematica компьютерлік алгебраның сандық әдістері қолданылады.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы

Диссертациялық жұмыста

1. Үш өсті бейстационар дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеу барысында ұйытқыған қозғалыс теңдеулері алынды.

2. Үш өсті бейстационар дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы

Делоне-Андуайе элементтер аналогында қарастырылып, эволюциялық тендеулері алынды.

3. Эволюциялық ұйытқу тендеулеріне аналитикалық талдау жасалынды.

4. Сандық әдістермен ұйтқыған қозғалыстың дифференциалдық тендеулерінің шешімдері алынды.

Қорғауға шығарылатын тұжырымдар

Ұйытқыған қозғалыстың оскуляциялаушы элементтерде аналитикалық жолмен он екі эволюциялық тендеулері алынды. Оларды жүйелеп бөліп, талдаулар жасалынды және сәйкес қорытындылар тұжырымдалды. Алынған ұйытқыған эволюциялық тендеулерін сандық әдістермен шешіліп, компьютерлік алгебраның көмегімен графиктері алынды.

Нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі

Жұмыстың ғылыми нәтижелері теориялық моделдің табиғаттағы аналогтарымен, сонымен қатар денелердің массасы мен өлшемдері тұрақты болған жағдайда басқа авторлар алған жұмыстардың нәтижелерімен сәйкес келеді және сонымен расталады.

Жұмыстың теориялық және іс жүзіндегі маңыздылығы

Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер ғарыштық бейстационар жүйелерді зерттеудің жаңа кезеңін анықтап, ғаламдағы күрделі бейстационар процестерді тереңірек түсінуге бағытталған зерттеулерге негіз болып табылады. Бұл нәтижелер ғылыми тұрғыдан маңызды болып, аспан денелерінің жасанды және табиғи серіктерінің динамикалық эволюциясын модельдеу және есептеу барысында қолданыла алатын жаңа тәсілдерді ұсынады.

Жұмысты апробациясы

1. Байсбаева О.Б. Үш өсті бейстационар дененің бейстационар шардың гравитациялық өрісіндегі ілгерлемелі-айналмалы қозғалысы. Материалы Международной научной конференции студентов и молодых ученых "ФАРАБИ ӘЛЕМІ", , КАЗАХСТАН, Алматы, КазНУ имени аль-Фараби, 10.04.2018-12.04.2018., 86 б.

2. M. Minglibayev, A. Prokopenya. O. Baisbayeva. Evolution equations of translational rotational motion of a triaxial body with constant dynamical shape and variable size in a non-stationary central gravitational field. Proceedings The 7th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Sremski Karlovci, Serbia, June 24-26, 2019, pp.129-130.

3. Mukhtar Minglibayev, Alexander Prokopenya, Oralkhan Baisbayeva. Analytical calculations of secular perturbations of translational-rotational motion of a non-stationary triaxial body in the central field of attraction. ACA 2019, 25th Conference on Applications of Computer Algebra, Montreal, Canada, July 16-20, 2019, pp. 156-157.

4. М.Дж.Минглибаев, О.Б. Байсбаева. Поступательно-вращательное движение нестационарного трехосного тела в нестационарном центральном поле тяготения. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 19-29 августа 2019, Уфа, Республика

Башкортостан, Россия. Сборник трудов в 4 томах. Том 1. Общая и прикладная механика, с. 708-71.

5. Mukhtar Minglibayev, Alexander Prokopenya, Oralkhan Baisbayeva. Secular Perturbations of Translational-Rotational Motion of a Non-stationary Triaxial Body in a Central Gravitational Field. CASTR 2019, Computer Algebra Systems in Teaching and Research, Volume VIII, Siedlce, Poland, September 25-29, 2019, pp.246-248.

6. M. Minglibayev, O. Baisbayeva. Translational-rotational motion of a triaxial body with variable compression in a non-stationary central gravity field. Computer Algebra Systems in Teaching and Research, Volume IX, Siedle University of Natural Sciences and Humanities, 2020, pp. 204-219.

Жарияланымдар

Scopus және Web of Science (Clarivate Analytics) дерекқорымен индекстелетін халықаралық ғылыми журналдарында:

1. Minglibayev M., Prokopenya A., Baisbayeva O. Evolution equations of translational-rotational motion of a non-stationary triaxial body in a central gravitational field. Theoretical and Applied Mechanics, V. 47 (2020), Issue 1, 63-80, DOI: <https://doi.org/10.2298/TAM191130007M>.

2. Prokopenya, A., Minglibayev, M., Baisbayeva, O. Analytical calculations of secular perturbations of translational-rotational motion of a non-stationary triaxial body in the central field of attraction. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) , 2020, 12291 LNCS, 478–491, DOI: [10.1007/978-3-030-60026-6_28](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60026-6_28).

ҚР Ғылым және жоғарғы білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті (ҒЖБМ ҒЖБССҚК) ұсынған ғылыми басылымдарында:

1. М.Дж.Минглибаев, О.Б. Байсбаева. К поступательно-вращательному движению трехосного нестационарного спутника. Вестник КазНПУ, серия «физико-математические науки», информатика 01(61) 2018г., с.197-201.

2. М.Дж.Минглибаев, О.Б. Байсбаева. Исследование поступательно-вращательного движения спутника с переменным тензором инерции в поле притяжения сферического тела. Совместный выпуск. Вестник ВКГТУ им. Д.Серикбаева. – Вычислительные технологии Института вычислительных технологии Сибирского отделения РАН. №3 Том 1. Часть3, 2018г., с. 179-195.

3.М.Дж.Минглибаев, О.Б. Байсбаева. Поступательно-вращательное движения трехосного тела с переменными сжатиями при наличии реактивных сил и моментов. "Хабаршы" КазНПУ им Абая, серия «Физико-математические науки» №1(69), 2020, с. 246-251.

Автордың қосқан үлесі

Диссертациялық жұмыстағы негізгі нәтижелер автордың өз зерттеулері негізінде алынды. Автор орташалау және ғасырлық ұйытқудың дифференциалдық теңдеулерін шығарды, әдебиеттерді талдап, ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің аналитикалық зерттеуін жүргізіп, қорытындыларды

жасады. Сондай-ақ, ғасырлық ұйытқу теңдеулері сандық тәсілдермен шешіліп, тұрақты және айнымалы массалар жағдайында графиктер салыстырылды. Ғылыми кеңесшілер есептің қойылымын анықтап, алынған нәтижелерді талдаумен айналысты.

Диссертациялық жұмыстың көлемі мен құрылымы

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшалардан тұрады. Жұмыстың жалпы көлемі беттен, суреттен және пайдаланылған әдебиеттер тізімі атаудан тұрады.

Алғыс

Автор отандық ғылыми кеңесшісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор М.Дж. Минглибаевқа және шетелдік ғылыми кеңесшісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор А.Н. Прокопеняға есептің қойылымын анықтауда, диссертациялық жұмысты зерттеу барысында көрсеткен ғылыми жетекшіліктері мен зор үлестері үшін шынайы алғысын білдіреді.

1 МАССАСЫ, ӨЛШЕМІ АЙНЫМАЛЫ ЖӘНЕ ПІШІНІ ТҰРАҚТЫ КӨЛЕМДІ ДЕНЕНІҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСІ

1.1 Массасы, өлшемі айнымалы және пішіні тұрақты дененің инерция эллипсоиды

Аспан денесінің тартылыс өрісіндегі нүкте орбитасын зерттегенде, оның пішінін сипаттаудың ең қолайлы моделі үш өсті эллипсоид болып табылады. Сондықтан да осы үш өсті эллипсоидтың негізгі сипаттамаларын қарастырайық.

P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) материалдық нүктелер жүйесін қарастырайық. Бас $Oxyz$ координата жүйесіне қатысты P_ν нүктенің m_ν - массасы және r_ν - радиус – векторы болсын. Жүйенің масса центрі деп радиус – векторымен анықталатын кеңістіктегі C геометриялық нүктені айтады

$$r_C = \frac{\sum_{\nu=1}^N m_\nu(t) r_\nu}{M}$$

мұндағы M жүйе массасы

$$M = \sum_{\nu=1}^N m_\nu(t)$$

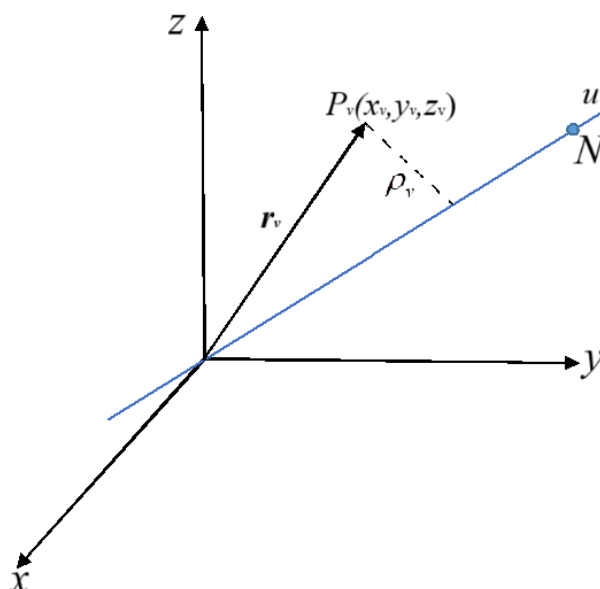
Масса центрі сонымен қатар оның инерция центрі деп аталады.

P_ν нүктенің белгілі бір u өске дейінгі арақашықтығы ρ_ν тең болсын. Онда шама

$$J_u = \sum_{\nu=1}^N m_\nu(t) \rho_\nu^2$$

u өсіне қатысты жүйенің инерция моменті деп аталады. J_u инерция моментін $M \rho^2$ түрде жазуға болады; ρ оң шамасы u өсіне қатысты жүйе инерциясының радиусы болса, ал M жүйе массасы. u өсін $Oxyz$ координата жүйесінің бас нүктесінен өтеді деп қарастырайық. u өсінің Ox Oy Oz өстерімен құраған бұрыштардың косинустарын сәйкесінше α, β, γ белгілейік. Онда (1.1 - ші сурет)

$$\begin{aligned} J_u &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu(t) \rho_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^N m_\nu(t) \left[(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - (x_\nu \alpha + y_\nu \beta + z_\nu \gamma)^2 \right] = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu(t) \left[(1 - \alpha^2) x_\nu^2 + (1 - \beta^2) y_\nu^2 + (1 - \gamma^2) z_\nu^2 - 2\alpha\beta x_\nu y_\nu - 2\alpha\gamma x_\nu z_\nu - 2\beta\gamma y_\nu z_\nu \right]. \end{aligned}$$



Сурет 1.1

$\alpha + \beta + \gamma = 1$ тепе – теңдік негізінде $\beta^2 + \gamma^2, \alpha^2 + \gamma^2, \beta^2 + \alpha^2$ сәйкесінше $1 - \alpha^2, 1 - \beta^2, 1 - \gamma^2$ ауыстырып келесі түрде жазамыз

~~$$J_x = \sum_{v=1}^N m_v(t) (y_v^2 + z_v^2), \quad J_y = \sum_{v=1}^N m_v(t) (z_v^2 + x_v^2), \quad J_z = \sum_{v=1}^N m_v(t) (x_v^2 + y_v^2), \quad (1.1)$$~~

мұнда келесі белгілеулер енгізілген

$$J_x = \sum_{v=1}^N m_v(t) (y_v^2 + z_v^2), \quad J_y = \sum_{v=1}^N m_v(t) (z_v^2 + x_v^2), \quad J_z = \sum_{v=1}^N m_v(t) (x_v^2 + y_v^2), \quad (1.2)$$

$$J_{xy} = \sum_{v=1}^N m_v(t) x_v y_v, \quad J_{xz} = \sum_{v=1}^N m_v(t) x_v z_v, \quad J_{yz} = \sum_{v=1}^N m_v(t) y_v z_v \quad (1.3)$$

(1.2), (1.3) – ші шамалары таңдап алынған u өсіне тәуелсіз. (1.2) – ші шама инерцияның өстік моменті деп аталады: J_x - Ox өсіне қатысты инерция моменті, J_y - Oy өсіне қатысты инерция моменті және J_z - бұл Oz өсіне қатысты инерция моменті. (1.2) – ші шама центрден тепкіш инерция моменті деп аталады. Өстік инерция моменті оның сәйкес өстерінің төңірегінде айналу кезіндегі жүйенің инерттілігін сипаттайды. Центрден тепкіш инерция моментін теңгерілмеген жүйе массасының өлшемі ретінде қарастыруға болады: координата жазықтығына қатысты массаның бейсимметриялық үлестірілуін сипаттайды.

Эллипсоид тензоры. Әртүрлі O нүктісі үшін өстік және центрден тепкіш инерция моменттері әртүрлі. Олар сонымен қатар қарастырылған O нүктесінің төңірегіндегі $Oxyz$ координата жүйесінің бұрылысы кезінде

өзгереді. (1.2), (1.3) – ші шамаларын бұру кезінде екінші рангтағы симметриялық тензорды анықтайтын теңдеулерге сәйкес өзгереді. $\mathbf{J}$ түрдегі матрица

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Жүйедегі O нүктесі үшін инерция тензоры деп аталатын, екінші рангтағы тензорды анықтайды. u өсінің бойынан O нүктесінің екі жағынан да ұзындығы ON кескін алайық (1 - ші сурет), ол

$$ON = \sqrt{J_u},$$

және $N(x,y,z)$ нүктесінің геометриялық орнын табамыз. Алатынымыз

$$\alpha = \sqrt{J_u}x, \quad \beta = \sqrt{J_u}y, \quad \gamma = \sqrt{J_u}z,$$

α, β және γ мәндерін (1) – ші теңдікке қойып

$$J_u = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad (1.5)$$

(1.5) – ші екінші қатар беті – эллипсоид. Шынымен де $J_u \geq \delta > 0$ болғандықтан ON кескіні шеткі ұзындыққа ие. P_v барлық нүктелері бір түзудің бойында жатқан жағдайларды қоспағанда. Онда $J_u = 0$ инерция моменті және инерция эллипсоиды цилиндрге айналады. (1.5) – ші эллипсоиды жүйедегі O нүктесі үшін инерция эллипсоиды деп аталады. Егер O нүктесі масса центрімен сәйкес келсе, онда (1.5) – ші эллипсоиды инерцияның центрлік эллипсоиды деп аталады. $Oxyz$ координата жүйесінің бұрылысы кезінде инерция эллипсоидының теңдеуі өзгереді. Инерция эллипсоидының бас өстері жүйедегі O нүктесі үшін бас инерция өстері деп аталады. Инерция эллипсоидының бас өстеріне бағытталған $Ox_*y_*z_*$ координата жүйесінде (1.5) – ші теңдеу келесі түрге келеді

$$J_u = A\alpha_*^2 + B\beta_*^2 + C\gamma_*^2 \quad (1.6)$$

Бұл координата жүйеде инерцияның центрден тепкіш моменті нөлге тең: $J_{\alpha_*} = J_{\beta_*} = J_{\gamma_*} = 0$. A, B, C – шамалары басты өске, сәйкесінше Ox_*, Oy_*, Oz_* өстерге қатысты инерция моменті. Жүйедегі O нүктесі үшін бас инерция моменттері деп аталады. Егер O нүктесі масса центрімен сәйкес келсе, онда Ox_*, Oy_*, Oz_* өстері инерцияның бас центрлік өстері деп аталады, ал A, B, C –

инерцияның бас центрлік моменттері деп аталады. Кез-келген эллипсоидтың бас өсі болатындығы аналитикалық геометриядан белгілі. A, B, C – шамалары (1.4) – ші матрицаға сәйкес келетін мәндер. Егер олар әртүрлі болса, онда басты өстері анықталады. Егер O нүктесі үшін инерция эллипсоиды Oz_* ось төңірегіндегі айналатын эллипсоид болса, онда оның басты өстері ретінде Oz_* өсін және эллипсоидтың экваторлық жазықтығында жатқан кез келген ортогональдық өсті қабылдауға болады. Егер $A=B=C$, онда O нүктесі арқылы өтетін барлық өстері басты болып саналады. Инерция моментінің ең үлкен моментіне эллипсоидтың ең кіші өсі қатысты, ал ең кішісіне – оның ең үлкен өсі қатысты.

Бас инерция моменттерінің қасиеттері. Кез келген эллипсоид инерция эллипсоиды бола алмайды. Егер O нүктесі үшін Ox_*, Oy_*, Oz_* өстерін инерцияның бас өстері деп қабылдасақ, онда инерция эллипсоидының теңдеуі (1.6) – ші түрге келеді, мұндағы

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(t) (y_{*\nu}^2 + z_{*\nu}^2), & B &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(t) (z_{*\nu}^2 + x_{*\nu}^2), \\ C &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(t) (x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Бас инерция моменттері (және де өстік инерция моменттері (1.2)) үш бұрыштардың теңсіздігін қанағаттандырады.

$$A + B \geq C, \quad B + C \geq A, \quad C + A \geq B. \quad (1.8)$$

Осы теңсіздіктердің біріншісін тексерейік

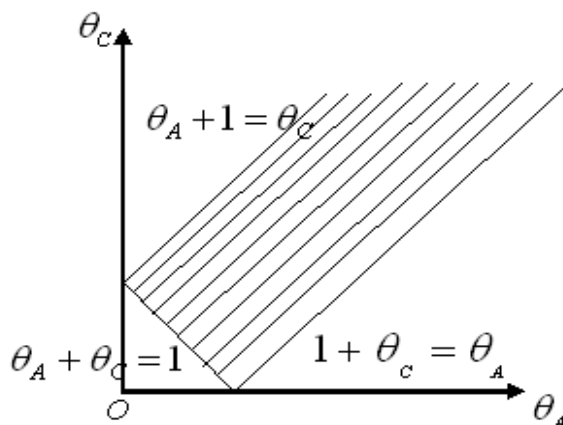
$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(t) (x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2 + 2z_{*\nu}^2) = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(t) (x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2) + 2 \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(t) z_{*\nu}^2 = C + 2 \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(t) z_{*\nu}^2 \geq C. \end{aligned}$$

теңдік белгісі жүйенің барлық нүктелері Ox_*, y_* жазықтығында жатқанда сонымен қатар барлық ν үшін $z_{*\nu} = 0$ болған жағдайда ғана ықтимал.

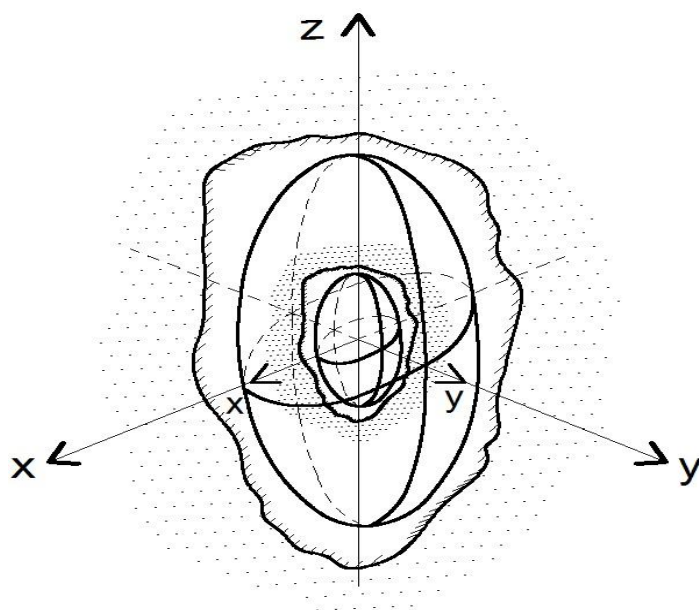
Инерция моментінің мүмкін мәндерінің аймағын графиктік түрде қарастыру үшін белгілеулер енгіземіз. Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CA} (1.8) – ші теңсіздікті келесі түрде жазылады.

$Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 1$ Параметрлердің мүмкін болатын мәндерінің аймағы жіңішке сызықтармен 1.2 – ші сурет көрсетілген. Ол өзара параллель $\theta_A + 1 = \theta_C$ және $1 + \theta_C = \theta_A$ және оң жақ пен түзудің жоғары жағында орналасқан $\theta_A + \theta_C = 1$ сызықтардың арасындағы шексіз сызықтармен

сипатталады. Шекаралық аймағындағы мүмкін болатын мәндерінің параметрлері



Сурет 1.2 – Параметрлердің мүмкін болатын мәндерінің аймағы



Сурет 1.3 - Үш өсті эллипсоид

$\theta_A + 1 = \theta_C$, $1 + \theta_C = \theta_A$ және $\theta_A + \theta_C = 1$ сәйкесінше Ox_y, Ox_z және Oy_z жазықтығында жатқан материалдық нүктелердің жүйесін көрсетеді. 1.2 суреттегі $(1,0)$ нүкте, $(0,1)$ нүкте және $\theta_A + 1 = \theta_C$, $1 + \theta_C = \theta_A$ түзуіндегі шексіз алыстаған нүктелер сәйкесінше Oz_* , Ox_* және Oy_* өстерінде жатқан материалдық нүктелердің жүйесін сипаттайды.

Кесте 1.1

Инерция моменттері		$A(t)$	$B(t)$	$C(t)$
Бас центрлік өстер		x'	y'	z'
τ орбитаға жанама	x	1	0	0
$\vec{n}$ орбита жазықтығына нормаль	y	0	1	0
$\vec{r}$ радиус -вектор	z	0	0	1

1.1 – ші кестедегі бірліктер мен нөлдер сәйкес бағыттар арасындағы косинус бұрыштарының мәндері.

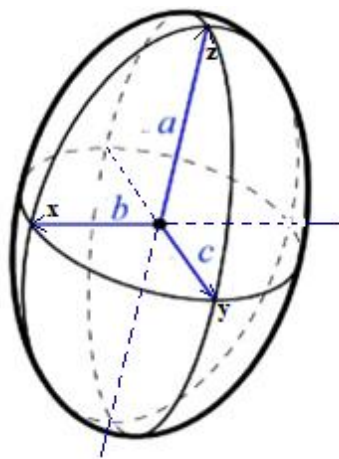
Қатты дене инерция эллипсоидының a, b, c жарты өстерін енгізейік.

$$a(t) \sim \frac{1}{\sqrt{A(t)}}, \quad b(t) \sim \frac{1}{\sqrt{B(t)}}, \quad c(t) \sim \frac{1}{\sqrt{C(t)}}.$$

(1.8) – ші шартынан C минималды инерция моменті екенін, ал кестеден осы инерция моментінің өсі масса центрінің радиус –векторына бағытталғанын көреміз. Сонымен қатар эллипсоид инерциясының максималды жарты өсі c орбитаның радиус –векторына бағытталған; сәйкесінше B максималды инерция моменті мен оған сәйкес эллипсоид инерциясының минималды жарты өсі b орбита жазықтығына нормаль бойынша бағытталған. Эллипсоидтың орташа жарты ось a орбитаға жанама орналасқан 1.3 – ші сурет.

Созылған эллипсоид кезінде

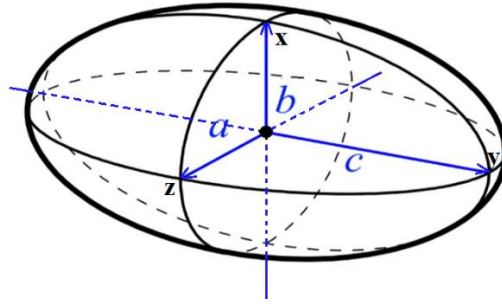
$$a(t) > b(t) > c(t).$$



Сурет 1.4. Созылған эллипсоид

Сығылған эллипсоид болған кезінде

$$a(t) < b(t) < c(t).$$



Сурет 1.5. Сығылған эллипсоид

1.2 Массалары айнымалы денелердің күштік функциясы

Ньютон заңына сәйкес массалары айнымалы $m_1(t)$ және $m_2(t)$ болатын, бір-бірінен r арақашықтықта орналасқан екі материалдық нүктелік денелердің өзара тартылыс күші келесі формуламен анықталады

$$F(t) = -f \frac{m_1(t)m_2(t)}{r^2},$$

мұнда f - пропорционалдық коэффициенті, оны механикада гравитациялық тұрақты деп атаса, аспан механикасында кейде f -тің орнына k гаусстық тұрақтыны пайдаланады, әрі $f \equiv k^2$. Абсолютті координаттар жүйесінде $O\xi_1\xi_2\xi_3$ $M_1(t)$ және $M_2(t)$ денелерінің орны $(\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31})$ мен $(\xi_{12}, \xi_{22}, \xi_{32})$ координаттары бар $\vec{R}_1$ және $\vec{R}_2$ векторларымен анықталады, сәйкесінше

$$r = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}| = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|,$$

денелердің өзара тартылыс күшінің координаттық өстерге проекцияларын келесі функцияның дербес туындысы ретінде қарастыруға болады

$$U(t) = f \frac{m_1(t)m_2(t)}{r}. \quad (1.9)$$

Шындығында,

$$F_{\xi_i}(t) = \frac{\partial U(t)}{\partial \xi_{ik}} = -f \frac{m_1(t)m_2(t)}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \xi_{ik}} \quad (i=1, 2, 3, k=1, 2).$$

Сол себептен $U(t)$ функциясын есептің күштік функциясы немесе денелердің өзара тартылыс функциясы деп, ал кейде - денелердің өзара тартылыс потенциалы деп те атайды (бірақ, потенциал дегеніміз нақты айтқанда, қарама-қарсы таңбамен алынған күштік функция болып табылады).

Егер екі дененің біреуі мысалы, $M_1(t)$ - нүктелік массасы бар дене, $M_2(t)$ - массасы мен өлшемдері шекті болатын дене болса, онда мұндай денелер жүйесінің күштік функциясын анықтау үшін $M_2(t)$ денесімен «қатаң» байланысқан қосымша координаттар жүйесін енгіземіз, бұл жүйенің басы $G_2 z_1 z_2 z_3$ $M_2(t)$ денесінің инерция центрімен сәйкес келеді.

Егер $M_2(t)$ денесінің көлемін инерция центрінен ρ_2 қашықтықта орналасқан dm_2 элементар массалары бар dV элементар көлемдердің жиыны деп қарастыратын болсақ, онда мұндай «денелер» жүйесі үшін жоғарыда айтылған күштік функциясы қолданылады. Дискреттік нүктелердің қосындыларынан тұратын формулалардан сәйкес тұтас денеге арналған формулаларға өткен соң, массалары айнымалы материалдық нүкте мен дененің өзара тартылысының күштік функциясының өрнегін келесі түрде аламыз

$$U(t) = f m_1(t) \iiint_{(M_2)} \frac{dm_2(t)}{\Delta} \quad (1.10)$$

мұндағы $\Delta = |\bar{\Delta}_{12}| = |\bar{\Delta}_{21}|$, әрі

$$\bar{\Delta}_{12} = -\bar{\Delta}_{21} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 + \vec{\rho}_2, \quad (1.11)$$

ал интегралдау $M_2(t)$ денесі бойымен толық жүргізіледі $M_2(t)$.

Екі қатты дененің өзара әсерлесуін қарастырған жағдайда алдыңғы жағдай сияқты пайымдай отырып, олардың күштік функциясын келесі түрде аламыз:

$$U(t) = f \int_{(M_1)} \int_{(M_2)} \frac{dm_1(t) dm_2(t)}{\Delta}, \quad (1.12)$$

мұндағы $\Delta = |\bar{\Delta}_{12}| = |\bar{\Delta}_{21}|$, әрі

$$\bar{\Delta}_{12} = -\bar{\Delta}_{21} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 + \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1, \quad (1.13)$$

мұнда белгілеуді қысқарту үшін осы және ары қарай үш еселі интегралдың орнына бір еселік белгілеу енгіземіз (1.2).

Әрі егер $G_k z_1 z_2 z_3$ меншікті координаттар жүйесінде $\vec{\rho}_k$ векторының координаттары (z_{1k}, z_{2k}, z_{3k}) болса, онда

$$dm_k = \delta(z_{1k}, z_{2k}, z_{3k}) dz_{1k} dz_{2k} dz_{3k}$$

локалдық жазықтықтың элементар көлемге көбейтіндісі ретінде қарастырамыз, ал

$$\Delta_{ij}^2 = \sum_{k=1}^3 (x_{ki} - x_{kj} + \sum_{n=1}^3 (a_{kn}^{(i)} z_{ni} - a_{kn}^{(j)} z_{nj}))^2 \quad (1.14)$$

Осы жерде және ары қарай, қосындылаудың шектері берілмеген болса, онда көрсетілген параметр 1 мен 3 тің арасында өзгереді деп пайымдаймыз. $a_{kn}^{(s)}$ - бағыттауыш косинустар, олар Эйлер бұрыштарымен келесі белгілі қатынастар арқылы байланысқан [29]:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(s)} &= \cos \varphi_s \cos \psi_s - \sin \varphi_s \sin \psi_s \cos \theta_s, \\ a_{21}^{(s)} &= \cos \varphi_s \sin \psi_s + \sin \varphi_s \cos \psi_s \cos \theta_s, \\ a_{31}^{(s)} &= \sin \varphi_s \sin \theta_s, \\ a_{12}^{(s)} &= -\sin \varphi_s \cos \psi_s - \cos \varphi_s \sin \psi_s \cos \theta_s, \\ a_{22}^{(s)} &= -\sin \varphi_s \sin \psi_s + \cos \varphi_s \cos \psi_s \cos \theta_s, \\ a_{32}^{(s)} &= \cos \varphi_s \sin \theta_s, \\ a_{13}^{(s)} &= \sin \psi_s \sin \theta_s, \\ a_{23}^{(s)} &= -\cos \psi_s \sin \theta_s, \\ a_{33}^{(s)} &= \cos \theta_s, \end{aligned} \quad (1.15)$$

бұдан біз күштік функция он екі параметрдың функциясы болып табылатындығына көзіміз жетеді: $x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, \psi_s, \theta_s, \varphi_s, (s = i, j)$.

1.3 Массасы мен өлшемі айнымалы үш өсті эллипсоидтың гравитациялық өрісі

Аспан денелерінің тартылыс өрісінде нүктенің қозғалысын зерттеу үшін үш өсті эллипсоид моделі (біртекті немесе біртекті емес) ыңғайлы әрі тиімді болып табылады. Сол себепті, екі дененің бірі – шар, ал екіншісі – үш өсті эллипсоид болған жағдайдағы үш өсті эллипсоидтың гравитациялық өрісін қарастырайық.

Тартылыс өрісін тудыратын дененің пішіні еркін түрде алынған болсын, ал оның тығыздығы $\alpha = \alpha(t, x, y, z)$ деп берілсін. Бұл жүйе денемен қатаң байланысқан Охуз координаталар жүйесінде қарастырылады, мұнда координата бас нүктесі Охуз дененің инерция центрімен сәйкес келеді. Осы P нүктесіндегі дененің тартылыс потенциалы U келесі теңдеумен өрнектеледі [66]

$$U = f \iiint_T \frac{\alpha d\tau}{\Delta}, \quad (1.16)$$

мұндағы f - гравитациялық тұрақтысы, $T = T(t)$ -дене көлемі

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}, \quad \cos \gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

$d\tau$ элемент көлемінде орналасқан r, x, y, z - радиус-вектор және P нүктесінің координатасы, ал r', x', y', z' - радиус-вектор және P' нүктесінің координатасы, γ - $\vec{r}$ мен $\vec{r}'$ осы векторлар арасындағы бұрыш, дененің тартылысында P нүктесі жатпайды деп есептеп r'/r қатынасының дәрежесі бойынша қатарға Δ^{-1} жіктейміз. Келесі өрнекті

жаза

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

бұл өрнек Лежандр полиномының кейбір қасиеттерін пайдалануға мүмкіндік береді. Осы теңдеуді қолданып $\frac{1}{\Delta}$ үшін келесі жіктеуді жазамыз

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \quad (1.17)$$

(1.16) – ші теңдеудің орнына қойып алатынымыз

$$U = f \iiint_T \frac{\alpha d\tau}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma). \quad (1.18)$$

Енді полярлық координаталар жүйесіне көшейк

$$\begin{array}{ll} x = r \sin \delta \cos \lambda, & x' = r' \sin \delta' \cos \lambda' \\ y = r \sin \delta \sin \lambda, & y' = r' \sin \delta' \sin \lambda' \\ z = r \cos \delta, & z' = r' \cos \delta' \end{array}$$

онда $\cos \gamma$ үшін табатынымыз

$$\cos \gamma = \sin \delta \sin \delta' \cos(\lambda - \lambda') + \cos \delta \cos \delta'.$$

(1.18) – ші өрнектің оң жағын полярлық координатамен өрнектеу үшін Лежандр полиномы үшін қосындылар теоремасы пайдаланып

$$\begin{aligned} & \cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda' \\ & \cos k\lambda \cos k\lambda' = \frac{1}{2} [\cos k(\lambda - \lambda') + \cos k(\lambda + \lambda')] \\ & \sin k\lambda \sin k\lambda' = \frac{1}{2} [\cos k(\lambda - \lambda') - \cos k(\lambda + \lambda')] \end{aligned} \quad (1.19)$$

мұндағы

$$\cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda'$$

онда (1.19)– ші теңдікті келесі түрде жазуға болады

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(\sin \delta) P_n(\sin \delta') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \delta) \cos k\lambda \left[P_n^{(k)}(\sin \delta') \cos k\lambda' \right] + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \delta) \sin k\lambda \left[P_n^{(k)}(\sin \delta') \sin k\lambda' \right]. \end{aligned}$$

Егер бұл теңдікті (1.18)- ші теңдеуге қойсақ

$$\begin{aligned} U &= f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\sin \delta) \iiint_T r'^n P_n(\sin \delta') \alpha d\tau + f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^k(\sin \delta) \cos k\lambda \cdot \\ &\cdot \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin \delta') \cos k\lambda' \alpha d\tau + f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^k(\sin \delta) \sin k\lambda \cdot \\ &\cdot \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin \delta') \sin k\lambda' \alpha d\tau. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Келесі белгілеулерді енгізейік

$$\begin{aligned} J_n(t) &= -\frac{\iiint_T r'^n P_n(\sin \delta') \alpha d\tau}{m(t) r_0^n(t)} \\ C_{nk}(t) &= \frac{\iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin \delta') \cos k\lambda' \alpha d\tau}{m(t) r_0^n(t)} \\ S_{nk}(t) &= \frac{\iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin \delta') \sin k\lambda' \alpha d\tau}{m(t) r_0^n(t)}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

мұндағы $m(t)$ дене массасы, $r_0(t)$ - сызықтық шама. Жер үшін r_0 орнына орташа экваторлық радиусты алған ыңғайлы. $J_n(t)$, $C_{nk}(t)$ және $S_{nk}(t)$ шамалары өлшемсіз екендігі белгілі. Осы белгілеулерді ескере (1.20) – ші өрнекті келесі түрде жазамыз

$$U = -\frac{fm(t)}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(t) \left(\frac{r_0(t)}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) + \frac{fm(t)}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0(t)}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \delta) [C_{nk}(t) \cos k\lambda + S_{nk}(t) \sin k\lambda] \quad (1.22)$$

$J_n(t)$, $C_{nk}(t)$ және $S_{nk}(t)$ коэффициенттері дене пішіні мен оның ішіндегі масса үлесіне байлынысты. Олардың біріншісін қарастырайық. (1.21) – да $n=0$ болсын

$$P_0(\sin \delta) = 1 \text{ және } \iiint_T \alpha d\tau = m(t),$$

онда

$$J_0 = -1 \quad (1.23)$$

(1.21)-ші теңдеуден $n=1$ және $k=1$ және келесіні ескере

$$\iiint_T r' \alpha \sin \delta' d\tau = -\iiint_T z' dm$$

табатынымыз

$$J_1(t) = -\frac{\iiint_T r' \alpha \sin \delta' d\tau}{m(t)r_0(t)} = \frac{-\iiint_T z' dm}{m(t)r_0(t)} = -\frac{z_0}{r_0(t)}$$

$$C_{11}(t) = \frac{\iiint_T r' \alpha \cos \delta' \cos \lambda' d\tau}{m(t)r_0(t)} = \frac{\iiint_T x' d\tau}{m(t)r_0(t)} = \frac{x_0}{r_0(t)}$$

$$S_{11} = \frac{\iiint_T r' \alpha \cos \delta' \sin \lambda' d\tau}{m(t)r_0(t)} = \frac{\iiint_T y' d\tau}{m(t)r_0(t)} = \frac{y_0}{r_0(t)}$$

мұндағы x_0, y_0, z_0 -дене масса центрінің координатасы. Координатаның бас нүктесі $Oxyz$ дененің инерция центрінде орналасқандықтан келесі қорытындыны жазамыз

$$J_0 = -1, \quad C_{11} = \frac{x_0}{r_0}, \quad S_{11} = \frac{y_0}{r_0} \quad (1.24)$$

егер (1.21)-ші теңдеудің орнына $n=2$ және $k=1, k=2$ орнына қойсақ, онда келесідей қарапайым теңдікті алуға болады

$$J_2(t) = \frac{2C(t) - (A(t) + B(t))}{2m(t)r_0^2(t)}, \quad C_{22} = \frac{B(t) - A(t)}{4m(t)r_0^2(t)}, \quad (1.25)$$

$$C_{21}(t) = \frac{E(t)}{m(t)r_0^2(t)}, \quad S_{21}(t) = \frac{D(t)}{m(t)r_0^2(t)}, \quad S_{22}(t) = \frac{F(t)}{2m(t)r_0^2(t)}.$$

мұндағы ~~$A(t), B(t), C(t)$~~ - центрлік бас инерция моменттері; ~~$I(t), H(t), F(t)$~~ - инерция туындысы, сонымен қатар

$$A(t) = \iiint_{T(t)} (y'^2 + z'^2) \alpha d\tau, \quad B(t) = \iiint_{T(t)} (x'^2 + z'^2) \alpha d\tau,$$

$$C(t) = \iiint_{T(t)} (x'^2 + y'^2) \alpha d\tau, \quad D(t) = \iiint_{T(t)} y' z' \alpha d\tau,$$

$$E(t) = \iiint_{T(t)} x' z' \alpha d\tau, \quad F(t) = \iiint_{T(t)} x' y' \alpha d\tau.$$

Келесі (1.23)-ші және (1.24)-ші негізінде (1.22)-ші теңдеуі соңғы түрге келеді

$$U = \frac{fm(t)}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n(t) \left(\frac{r_0(t)}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0(t)}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \delta) [C_{nk}(t) \cos k\lambda + S_{nk}(t) \sin k\lambda] \right\}. \quad (1.26)$$

Бірнеше ескеретін жайттарға тоқталайық:

1. Координатаның бір өсі айталық Oz өсі бас инерция өсімен сәйкес келсін делік. Онда D және E инерция туындысы нөлге тең болады, сондықтан $S_{21} = 0$, $C_{21} = 0$
Егер барлық үш координата өстері бас центрлік инерция өстерімен сәйкес келсе $S_{22} = 0$ коэффициенті де нөлге тең болады.
2. Егер тығыздық және дене пішіні тұрақты болса, онда J_n, C_{nk}, S_{nk} шамалары да тұрақты болады, ал егер тығыздық және дене пішіні уақытқа тәуелді болса, онда $J_n(t), C_{nk}(t), S_{nk}(t)$ шамалары да уақыт функциясы болады.

Қарастырылып отырған мәселедегі шарттар:

1. Бірінші дене шар, екінші дене үш өсті дене, яғни екінші дене үшін

$$A_2 = A_2(t), \quad B_2 = B_2(t), \quad C_2 = C_2(t).$$

$$A_2 \geq B_2 \geq C_2; \quad A_2 \neq C_2$$

2. Үш өсті дененің үш симметрия жазығы болғандықтан (1.25) коэффициенттер нөлге тең болады.

3. Өзіндік координата жүйесінің өстері бас инерция өстерімен сәйкес келеді және ол күйі эволюция барысында сақталғандықтан U потенциалын жіктегендегі S_{22}, C_{21}, S_{21} коэффициенттері нөлге тең болады.

Жоғарыда жүргізілген түрлендірулер кез-келген өзара тартылатын денелер жүйесіне тән күштік функцияның жалпы өрнегін сипаттайды. Алайда, практикалық есептерде көбінесе бұл қатардың тек алғашқы бірнеше мүшелері пайдаланылады. Сол себепті, осы бастапқы мүшелердің толық өрнектерін анықтау орынды. Біз күштік функцияны екінші гармоникаға дейін жуықтап қарастырамыз.

Ең алдымен, бізде

$$P_0(P, M) = P_0(\cos \gamma) = 1 \quad (1.27)$$

Ары қарай, оңай аламыз

$$P_1(P, M) = rr'P_1(\cos \gamma) = rr' \cos \gamma = xx' + yy' + zz', \quad (1.28)$$

Енді $n = 2$ деп есептеп табатынымыз

$$P_2(P, M) = r^2 r'^2 P_2(\cos \gamma) = r^2 r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right), \quad (1.29)$$

осыдан

$$P_2(P, M) = \frac{3}{2}(xx' + yy' + zz') - \frac{1}{2}r'^2(x^2 + y^2 + z^2), \quad (1.30)$$

немесе толық түрде

$$\begin{aligned} P_2(P, M) = & \frac{x^2}{2}(3x'^2 - r'^2) + \frac{y^2}{2}(3y'^2 - r'^2) + \\ & + \frac{z^2}{2}(3z'^2 - r'^2) + 3xy \cdot x'y' + 3xz \cdot x'z' + 3yz \cdot y'z', \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$U_n(x, y, z) = \int_{(T)} P_n(P, M) dm, \quad (1.32)$$

Онда $n = 0, 1, 2$ деп есептеп және (1.27)-(1.31) формулаларды ескере отырып, біздің табатынымыз

$$U_0(x, y, z) = \int_{(T)} dm = m, \quad (1.33)$$

мұндағы m – тартылатын дененің жалпы массасы.

Ары қарай

$$U_1(x, y, z) = x \int_{(T)} x' dm + y \int_{(T)} y' dm + z \int_{(T)} z' dm = m(xx' + yy' + zz'), \quad (1.34)$$

$n = 2$ үшін табатынымыз

$$\begin{aligned} U_2(x, y, z) = & \frac{x^2}{2} \int_{(T)} (3x'^2 - r'^2) dm + \frac{y^2}{2} \int_{(T)} (3y'^2 - r'^2) dm + \\ & + \frac{z^2}{2} \int_{(T)} (3z'^2 - r'^2) dm + 3xy \int_{(T)} x'y' dm + \\ & + 3xz \int_{(T)} x'z' dm + 3yz \int_{(T)} y'z' dm, \end{aligned} \quad (1.35)$$

Мұнда жоғарыда берілген екінші ретті инерция моменттерінің өрнектерін қолданып, U_2 өрнегін келесідей жазамыз

$$\begin{aligned} U_2(x, y, z) = & \frac{1}{2}(B + C - 2A)x^2 + \frac{1}{2}(B + C - 2A)y^2 + \\ & + \frac{1}{2}(B + C - 2A)z^2 + 3Dxy + Exz + 3Fyz, \end{aligned} \quad (1.36)$$

U_2 көпмүшесін ыңғайлырақ келесідей түрде де жазуға болады

$$U_2(x, y, z) = \frac{1}{2}r^2(A + B + C - 3J), \quad (1.37)$$

мұндағы

$$J = A\left(\frac{x}{r}\right)^2 + B\left(\frac{y}{r}\right)^2 + C\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 2D\frac{xy}{r} - 2E\frac{xz}{r} - 2F\frac{yz}{r}, \quad (1.38)$$

екі дененің массалар центрін қосатын түзуге қатысты өстік симметриялы дененің инерция моменті.

Егер координата өстері дененің бас инерция өстерімен сәйкес келсе, $D = E = F = 0$ және (1.36)-(1.37) формулалары қарапайым түрге келеді

$$\begin{aligned} U_2(x, y, z) = & \frac{1}{2}(B + C - 2A)x^2 + \frac{1}{2}(A + C - 2B)y^2 + \frac{1}{2}(A + B - 2C)z^2 = \\ & = \frac{1}{2}(B + C - 2A)(x^2 - z^2) + \frac{1}{2}(A + C - 2B)(y^2 - z^2), \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$J = A\left(\frac{x}{r}\right)^2 + B\left(\frac{y}{r}\right)^2 + C\left(\frac{z}{r}\right)^2, \quad (1.40)$$

Егер P_1 – шар, бас инерция моменттері бір-біріне тең

$$A_1(t) = B_1(t) = C_1(t)$$

яғни

$$U_1 \approx \frac{fm_1(t)m_2(t)}{R}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (1.41)$$

Егер P_2 – бейстационар үш өсті дене, бас инерция моменттері өзара тең емес

$$A_2(t) \neq B_2(t) \neq C_2(t),$$

яғни

$$U_2 = fm_1(t) \frac{A_2(t) + B_2(t) + C_2(t) - 3J_2}{2R^3}, \quad (1.42)$$

Сонымен, өзара гравитацияланушы центрлік дене шар мен үш өсті бейстационар дененің күштік функцияның өрнегі келесідей болады:

$$U \approx \frac{fm_1(t)m_2(t)}{R} + fm_1(t) \frac{A_2(t) + B_2(t) + C_2(t) - 3J_2}{2R^3}. \quad (1.43)$$

2 БЕЙСТАЦИОНАР ҮШ ӨСТІ ДЕНЕНІҢ БЕЙСТАЦИОНАР СФЕРАЛЫҚ ДЕНЕНІҢ ӨРІСІНДЕГІ ІЛГЕРІЛМЕЛІ-АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ҚОЗҒАЛЫС ТЕНДЕУЛЕРІ

2.1 Бейстационар үш өсті дененің абсолютті координаттар жүйесіндегі қозғалыс теңдеуі

Өзара Ньютон заңы бойынша гравитацияланатын екі бейстационар денелердің ілгерілмелі-айналмалы қозғалысының дербес жағдайын қарастырайық [11]. Бірінші дене – массасы сфералық түрде үлестірілген сфералық дене болсын делік. Оның массасы мен радиусы уақытта байланысты өзгеріп отырады, бірақ динамикалық пішімі сақталады. Басқаша айтқанда, дене үнемі сфералық дене болып, ал инерция эллипсоиды үнемі шар (бірөлшемді) болып қалады.

Екінші дененің динамикалық құрылымы еркін түрде алынған, оның инерция эллипсоиды үш өсті (үшөлшемді) болып табылады. Екінші дененің массасы мен өлшемдері айнымалы болсын делік, бірақ оның бастапқы динамикалық пішімі сақталады. Бұл оның инерция эллипсоиды үш өсті болып қалады және барлық уақытта бастапқы күйге ұқсас болады дегенді білдіреді. Мысалы, бұл эволюция барысында дене барлық уақытта өзара перпендикуляр үш жазықтыққа қатысты симметрияға ие болған жағдайда орын алады. Сонда үш өсті дененің инерция центрі мен негізгі инерция өстерінің бастапқы орналасулары эволюция кезінде өзгеріссіз қалады және үш өзара перпендикуляр жазықтықтың қиылысу сызығының бойымен бағытталады. Ендеше келесі болжамдар жасайық:

1. Бірінші дене – массасы $m_1 = m_1(t)$ мен радиусы $l_1^* = l_1^*(t)$ айнымалы, массасы сфералық түрде үлестірілген шар. Оның екінші ретті инерция моменттері бірдей $A_1(t) = B_1(t) = C_1(t)$;
2. Екінші дене – еркін динамикалық құрылымы және сызықты өлшемдері $l_2^* = l_2^*(t) = l(t_0)\chi(t)$ бар, массасы айнымалы $m_2 = m_2(t) = m_2(t_0)m(t)$ үш өсті дене, t_0 - бастапқы уақыт мезеті. Оның екінші ретті инерция моменттері айнымалы және белгілі уақыт функциясы болып табылады:

$$A_2 = A_2(t), \quad B_2 = B_2(t), \quad C_2 = C_2(t). \quad (2.1)$$

$$A_2 \geq B_2 \geq C_2; \quad A_2 \neq C_2$$

3. Екінші дененің динамикалық пішімі өзгеріссіз қалады. Оның бас инерция моменттері бірдей қарқында өзгереді

$$\frac{A_2(t)}{A_2(t_0)} = \frac{B_2(t)}{B_2(t_0)} = \frac{C_2(t)}{C_2(t_0)} = v\chi^2 \quad (2.2)$$

мұнда t_0 - бастапқы уақыт мезеті, $m = m(t)$, $\chi = \chi(t)$ - берілген белгілі уақыт функциялары. Бұл үш өсті дененің өлшемдері гомотетикалық түрде өзгертіндігін, ал оның бастапқы пішімі өзгеріссіз қалатындығын, бірақ өлшемдері мен массалары уақыт өткен сайын өзгеріп отыратындығын білдіреді.

4. Екінші дененің өзіндік координаттар жүйесінің өстері бас инерция өстерімен сәйкес келеді және осы күйін эволюция барысында сақтайды.
5. Денелердің массалары мен сызықты өлшемдері әртүрлі меншікті қарқында изотропты, радиалды түрде өзгереді

$$\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)} \neq \frac{\dot{m}_2(t)}{m_2(t)}, \quad \frac{\dot{l}_1^*(t)}{l_1^*(t)} \neq \frac{\dot{l}_2^*(t)}{l_2^*(t)}. \quad (2.3)$$

6. Бөлінетін (қосылатын) бөлшектердің салыстырмалы жылдамдықтары нөлге тең [11]

$$u_\xi - \dot{\xi} = 0, \quad u_\eta - \dot{\eta} = 0, \quad u_\zeta - \dot{\zeta} = 0, \quad (2.4)$$

және қосымша айналдырушы моменттер туындамайды.

7. Денелердің ньютондық өзара тартылысының күштік функциясының өрнегінен екінші зоналық гармоникасын қоса есептегендегі жуықтауымен шектелеміз

$$U \approx U_1 + U_2. \quad (2.5)$$

Қабылдаған болжамдарды ескере отырып (2.1.1)-(2.1.5) $O\xi\eta\zeta$ абсолюттік координаттар жүйесіндегі (2.1 сурет) бейстационар екі дененің ілгерілмелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуі келесі түрде болады [11]:

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \quad m_1 \ddot{\eta}_1 = \frac{\partial U}{\partial \eta_1}, \quad m_1 \ddot{\zeta}_1 = \frac{\partial U}{\partial \zeta_1} \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}(A_1 p_1) = 0, \quad \frac{d}{dt}(B_1 q_1) = 0, \quad \frac{d}{dt}(C_1 r_1) = 0, \quad A_1 = B_1 = C_1. \quad (2.7)$$

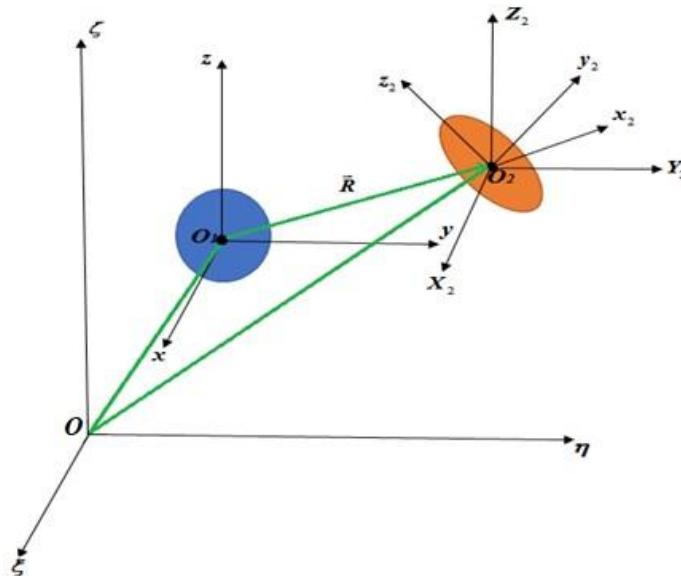
$$m_2 \ddot{\xi}_2 = \frac{\partial U}{\partial \xi_2}, \quad m_2 \ddot{\eta}_2 = \frac{\partial U}{\partial \eta_2}, \quad m_2 \ddot{\zeta}_2 = \frac{\partial U}{\partial \zeta_2} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A_2 p_2) - (B_2 - C_2) q_2 r_2 &= \frac{\sin \varphi_2}{\sin \theta_2} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_2} - \cos \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right] + \cos \varphi_2 \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \\
\frac{d}{dt}(B_2 q_2) - (C_2 - A_2) r_2 p_2 &= \frac{\cos \varphi_2}{\sin \theta_2} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_2} - \cos \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right] - \sin \varphi_2 \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \\
\frac{d}{dt}(C_2 r_2) - (A_2 - B_2) p_2 q_2 &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_2},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

мұндағы $m_i(t)$, $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$ – денелердің массалары және бас инерция моменттері; p_1, q_1, r_1 мен p_2, q_2, r_2 – денелердің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығының өзіндік координаталар жүйесінің өстеріне проекциялары. Олар Эйлердің кинематикалық теңдеулерімен сипатталады

$$\begin{aligned}
p_i &= \dot{\psi}_i \sin \theta_i \sin \varphi_i + \dot{\theta}_i \cos \varphi_i, \\
q_i &= \dot{\psi}_i \sin \theta_i \cos \varphi_i - \dot{\theta}_i \sin \varphi_i, \\
r_i &= \dot{\psi}_i \cos \theta_i + \dot{\varphi}_i, \quad i=1,2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ – Эйлер бұрыштары. Алынған (2.6) – (2.10) дифференциалдық теңдеулер қарастырылып отырған қойылымда абсолюттік координаттар жүйесіндегі екі бейстационар дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын толық сипаттайды.



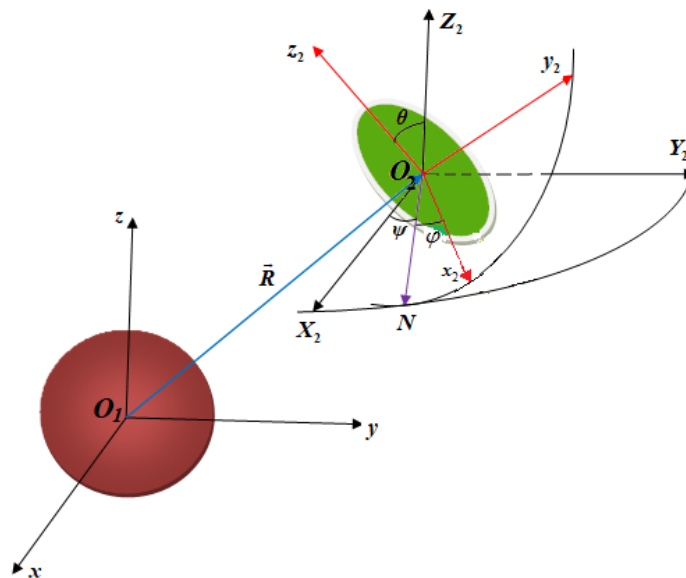
Сурет 2.1 – Абсолюттік координаттар жүйесіндегі шар мен үш өсті дене.

Абсолюттік координаттар жүйесіндегі бейстационар сфералық дененің айналмалы қозғалысының теңдеуі (2.7) оңай интегралданады. Ал егер қарастырылып отырған екі бейстационар дененің инерция центрлерінің арасындағы қашықтық және екінші дененің айналмалы қозғалысы белгілі болса, онда абсолюттік координаттар жүйесіндегі бейстационар сфералық

дененің ілгерілемелі қозғалысының теңдеуі де (2.6) интегралданады. Бірақ екінші үш өсті дененің дифференциалдық қозғалыс теңдеулерінің интегралдарын алу қиынға соғады, сондықтан, ары қарай қозғалысты салыстырмалы координаттар жүйесінде қарастырған дұрыс.

2.2 Бейстационар үш өсті дененің салыстырмалы координаттар жүйесіндегі қозғалыс теңдеуі

Астрономиялық бақылаулар аспан денелерінің бізге тек салыстырмалы орны мен жылдамдығын береді. Сондықтан нақты аспан денелерінің қозғалысын салыстырмалы координаттар жүйесінде қарастырып зерттеу ыңғайлы.



Сурет 2.2 - Салыстырмалы координаттар жүйесіндегі шар мен үш өсті дене.

Екі дененің массалар центрі абсолюттік координаталар жүйесіне қатысты салыстырмалы қозғалыс жасайды. Бұл қасиет бүкіл жүйенің қозғалысын сипаттап, оны жалпы массалар центріне қатысты жеке нүктелердің қозғалысын зерттеумен шектеуге мүмкіндік береді.

$O\xi\eta\zeta$ абсолюттік координаттар жүйесінен координата басы сфералық дененің центрінен басталатын O_1xyz салыстырмалы координаттар жүйесіне өтейік. Салыстырмалы координаттар жүйесінің координаттық өстері абсолютті координат жүйесінің сәйкес өстеріне параллель болсын (2.2 сурет).

$$x = \xi_2 - \xi_1, \quad y = \eta_2 - \eta_1, \quad z = \zeta_2 - \zeta_1 \quad (2.11)$$

белгілеп алайық.

Абсолютті координаттар жүйесіндегі қозғалыс теңдеулеріне (2.6)-(2.10) сүйене отырып, салыстырмалы координаталар жүйесіндегі үш өсті бейстационар дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеулерін алайық.

Ең алдымен бірінші дененің инерция центріне қатысты екінші дененің инерция центрінің ілгерлемелі қозғалыс теңдеулерін салыстырмалы координаталар жүйесінде жазайық:

$$\mu(t)\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu(t)\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu(t)\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.12)$$

мұндағы $\mu(t) = m_1(t)m_2(t)/(m_1(t)+m_2(t))$ - келтірілген масса, U - екі дененің тартылыс күшін анықтайтын күштік функция

$$U \approx U_1 + U_2, \quad U_1 = \frac{fm_1m_2}{R}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.13)$$

$$U_2 = fm_1 \frac{A+B+C-3\tilde{I}}{2R^3}, \quad A=A_2, \quad B=B_2, \quad C=C_2, \quad (2.14)$$

$$\tilde{I} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \quad (2.15)$$

f - гравитациялық тұрақты, $\tilde{I}$ - екі дененің массалар центрін $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{R}$ қосатын векторға қатысты бейстационар үш өсті дененің инерция моменті, α, β, γ - $\overrightarrow{O_1O_2}$ векторының бейстационар үш өсті дененің центрлік өстерімен түзетін косинус бұрыштары:

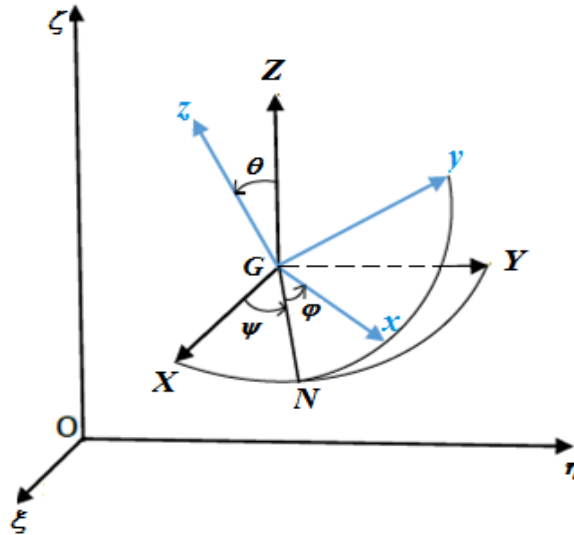
$$\begin{aligned} \alpha &= a_{11} \frac{x}{R} + a_{21} \frac{y}{R} + a_{31} \frac{z}{R} = \cos(\vec{R} \wedge \overrightarrow{O_2x_2}), \\ \beta &= a_{12} \frac{x}{R} + a_{22} \frac{y}{R} + a_{32} \frac{z}{R} = \cos(\vec{R} \wedge \overrightarrow{O_2y_2}), \\ \gamma &= a_{13} \frac{x}{R} + a_{23} \frac{y}{R} + a_{33} \frac{z}{R} = \cos(\vec{R} \wedge \overrightarrow{O_2z_2}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} - \vec{R}$ векторының $O_2x_2y_2z_2$ координаттар жүйесінің айналмайтын өстеріне қатысты бағыттауыш косинустары

$a_{ij} - O_2x_2y_2z_2$ қозғалмалы және $O_2X_2Y_2Z_2$ қозғалмайтын координаттар жүйелерінің арасындағы бұрыштардың косинустары

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\theta = \cos(\overrightarrow{O_2x_2} \wedge \overrightarrow{O_2X_2}), \\ a_{21} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta = \cos(\overrightarrow{O_2x_2} \wedge \overrightarrow{O_2Y_2}), \\ a_{31} &= \sin\varphi \sin\theta = \cos(\overrightarrow{O_2x_2} \wedge \overrightarrow{O_2Z_2}), \\ a_{12} &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\theta = \cos(\overrightarrow{O_2y_2} \wedge \overrightarrow{O_2X_2}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta = \cos(\overrightarrow{O_2 y_2} \wedge \overrightarrow{O_2 Y_2}), \\
a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta = \cos(\overrightarrow{O_2 y_2} \wedge \overrightarrow{O_2 Z_2}), \\
a_{13} &= \sin \psi \sin \theta = \cos(\overrightarrow{O_2 z_2} \wedge \overrightarrow{O_2 X_2}), \\
a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta = \cos(\overrightarrow{O_2 z_2} \wedge \overrightarrow{O_2 Y_2}), \\
a_{33} &= \cos \theta = \cos(\overrightarrow{O_2 z_2} \wedge \overrightarrow{O_2 Z_2}),
\end{aligned}$$



Сурет 2.3 – Үш өсті дене үшін Эйлер бұрыштары

Енді үш өсті дененің массалар центрі төңірегіндегі айналмалы қозғалыс теңдеуін салыстырмалы координаталар жүйесінде келесі түрде жазамыз

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A(t)p) - (B(t) - C(t))qr &= \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] + \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\
\frac{d}{dt}(B(t)q) - (C(t) - A(t))rp &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] - \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\
\frac{d}{dt}(C(t)r) - (A(t) - B(t))pq &= \frac{\partial U}{\partial \varphi},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$p = p_2$, $q = q_2$, $r = r_2$ - екінші дененің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығының өзіндік координата жүйесінің өстеріне проекциялары сәйкесінше олар Эйлердің кинематикалық теңдеулері арқылы анықталады

$$\begin{aligned}
p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\
q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, \\
r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$\varphi = \varphi_2, \psi = \psi_2, \theta = \theta_2$ - Эйлер бұрыштары [1,4,5,15] (2.3 сурет) .

Алынған (2.12) - (2.18) теңдеулер қарастырылып отырған қойылымда бейстационар сфералық дененің тартылыс өрісіндегі бейстационар үш өсті дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын салыстырмалы координаталар жүйесінде толық сипаттайды.

Қарастырылған есепте массасы мен өлшемдері тұрақты болған жағдайда бірнеше классикалық интегралдар бар. Алайда, массасы мен өлшемдері айнымалы болған біздің жағдайымызда бұл интегралдар болмайды, тек бір ғана геометриялық интеграл $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ бар. Есептің қойылымы өте күрделі болғандықтан, оны зерттеу үшін ұйытқу теориясының әдістерін қолданамыз.

2.3 Ұйытқымаған ілгерілмелі-айналмалы қозғалысты Гамильтон-Якоби әдісімен интегралдау

Үш өсті бейстационар дененің массалар центрінiң ілгерілмелі қозғалысын квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыстың оскуляциялаушы элементтерінде қарастырайық. Ол үшін (2. 2.12) теңдеулерін келесі түрде жазайық

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -f \frac{m_1 + m_2}{R^3} x + bx + \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -f \frac{m_1 + m_2}{R^3} y + by + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -f \frac{m_1 + m_2}{R^3} z + bz + \frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}\tag{2.20}$$

мұнда

$$V = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} U_2 - \frac{1}{2} b R^2, \quad b = b(t_0) = \frac{\ddot{v}}{v} = (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right),\tag{2.21}$$

V күштік функцияны осылай анықтау тиімді, себебі $V = 0$ жағдайында ұйытқымаған ілгерілмелі қозғалысты анықтай аламыз. Шынында да, $V = 0$ кезінде (2.3.1) теңдеулерін Гамильтон–Якоби әдісімен интегралдауға болады [13,32]. Мұны көрсету үшін жаңа айнымалыларға ρ, δ, λ өтейік. Ал үш өсті бейстационар дененің айналмалы қозғалысының (2.18) теңдеулері өзгеріссіз қалады.

$$x = \nu \rho \cos \delta \cos \lambda, \quad y = \nu \rho \cos \delta \sin \lambda, \quad z = \nu \rho \sin \delta\tag{2.22}$$

мұндағы

$$\nu = \frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_1(t) + m_2(t)} = \nu(t).$$

Онда кинетикалық энергияның өрнегі

$$K^{nocm} = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

жаңа айнымалыларда

$$K = \frac{1}{2} \mu \left[\nu^2 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\delta}^2 + \rho^2 \cos^2 \delta \dot{\lambda}^2) + 2 \left(\nu \dot{\nu} \rho \dot{\rho} + \frac{1}{2} \dot{\nu}^2 \rho^2 \right) \right]$$

болады. ρ, δ, λ координаталарына канондық түрде сәйкес келетін импульстарды келесі түрде анықтайық

$$P_\rho = \frac{\partial K^{nocm}}{\partial \dot{\rho}} = \mu \nu^2 \dot{\rho} + \mu \nu \dot{\nu} \rho,$$

$$P_\delta = \frac{\partial K^{nocm}}{\partial \dot{\delta}} = \mu \nu^2 \rho \dot{\delta},$$

$$P_\lambda = \frac{\partial K^{nocm}}{\partial \dot{\lambda}} = \mu \nu^2 \rho^2 \cos^2 \delta \dot{\lambda},$$

онда (2.20) тендеулерін канондық түрде жазамыз

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial H^{nocm}}{\partial P_\rho}, & \dot{P}_\rho &= -\frac{\partial H^{nocm}}{\partial \rho} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} P_\rho \\ \dot{\delta} &= \frac{\partial H^{nocm}}{\partial P_\delta}, & \dot{P}_\delta &= -\frac{\partial H^{nocm}}{\partial \delta} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} P_\delta, \\ \dot{\lambda} &= \frac{\partial H^{nocm}}{\partial P_\lambda}, & \dot{P}_\lambda &= -\frac{\partial H^{nocm}}{\partial \lambda} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} P_\lambda \end{aligned} \quad (2.23)$$

мұндағы Гамильтониан келесі түрде беріледі

$$H^{nocm} = H_0^{nocm} + H_{1603M}^{nocm}$$

$$H_0^{nocm} = \frac{1}{2\nu^2} \left[(P_\rho - \nu \dot{\nu} \rho)^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \delta} \right] - \left[f \frac{m_1 + m_2}{\nu \rho} + \frac{1}{2} \dot{\nu}^2 \rho^2 + \frac{1}{2} \nu \ddot{\nu} \rho^2 \right]$$

$$H_{1603M}^{пост} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} U_2 + \frac{1}{2} v \ddot{\nu} \rho^2. \quad (2.24)$$

Енді ψ, φ, θ координаталарына канондық түрде сәйкес келетін импульстарды келесі түрде анықтайық

$$\varphi, \psi, \theta, \quad P_\varphi = \frac{\partial K^{ep}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad P_\psi = \frac{\partial K^{ep}}{\partial \dot{\psi}}, \quad P_\theta = \frac{\partial K^{ep}}{\partial \dot{\theta}}, \quad K^{ep} = \frac{1}{2} (A(p^2 + q^2) + Cr^2) \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2} (Ap^2 + Aq^2 - Aq^2 + Bq^2 + Cr^2) = \\ &= \frac{1}{2} (A(p^2 + q^2) + Cr^2) + \frac{1}{2} ((B - A)q^2), \end{aligned} \quad (2.26)$$

онда (2.18) теңдеуді канондық түрде жазайық [6,8,13,18]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial H^{ep}}{\partial P_\varphi}, & \dot{\theta} &= \frac{\partial H^{ep}}{\partial P_\theta}, & \dot{\psi} &= \frac{\partial H^{ep}}{\partial P_\psi}, \\ \dot{P}_\varphi &= -\frac{\partial H^{ep}}{\partial \varphi}, & \dot{P}_\theta &= -\frac{\partial H^{ep}}{\partial \theta}, & \dot{P}_\psi &= -\frac{\partial H^{ep}}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (2.27)$$

мұндағы

$$H^{ep} = H_0^{ep} + H_{1603M}^{ep} \quad (2.28)$$

$$H_0^{ep} = \frac{1}{2A} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} (P_\psi - P_\varphi \cos \theta)^2 + P_\theta^2 \right] + \frac{P_\varphi^2}{2C}, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} H_{1603M}^{ep} &= \frac{1}{2} \left(\frac{B - A}{A^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \\ &\times \left[(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \cos \varphi - P_\theta \sin \varphi \sin \theta \right]^2 - \left(U_2 - \frac{1}{2} b R^2 \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

$H_{1603M}^{пост}$ және H_{1603M}^{ep} ұйытқытушы функцияларын осылайша анықтау бізге екі тәуелсіз интегралданатын ұйытқымаған ілгерілмелі және айнымалы қозғалысты енгізуге мүмкіндік береді. Онда $H_{1603}^{пост} = 0$, $H_{1603}^{ep} = 0$ тең болғандағы қарапайымдалған жүйе келесідей болады

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{\partial H_0^{nocm}}{\partial P_\rho}, & \dot{\delta} &= \frac{\partial H_0^{nocm}}{\partial P_\delta}, & \dot{\lambda} &= \frac{\partial H_0^{nocm}}{\partial P_\lambda}, \\ \dot{P}_\rho &= -\frac{\partial H_0^{nocm}}{\partial \rho}, & \dot{P}_\delta &= -\frac{\partial H_0^{nocm}}{\partial \delta}, & \dot{P}_\lambda &= -\frac{\partial H_0^{nocm}}{\partial \lambda}\end{aligned}\quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\partial H_0^{ep}}{\partial P_\phi}, & \dot{\theta} &= \frac{\partial H_0^{ep}}{\partial P_\theta}, & \dot{\psi} &= \frac{\partial H_0^{ep}}{\partial P_\psi}, \\ \dot{P}_\phi &= -\frac{\partial H_0^{ep}}{\partial \phi}, & \dot{P}_\theta &= -\frac{\partial H_0^{ep}}{\partial \theta}, & \dot{P}_\psi &= -\frac{\partial H_0^{ep}}{\partial \psi}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

(2.31), (2.32) теңдеулері ұйытқымаған ілгерілімелі-айналмалы қозғалысты сипаттайды және олар Гамильтон-Якоби әдісімен интегралданады. Алдымен ілгерілімелі қозғалыс үшін Гамильтон-Якоби теңдеуін жазайық

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0^{nocm} = 0,$$

толық интегралы келесідей болады

$$\begin{aligned}S &= -\alpha_1 \int_{t_0}^t \frac{1}{v^2(t)} dt + \frac{\mu v \dot{v}}{2} \rho^2 + \Lambda_1(\rho) + \Lambda_2(\delta) + \Lambda_3(\lambda), \\ \Lambda_1(\rho) &= \int_{\rho_1}^{\rho} \left(2\mu_0 \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2} + \frac{2v^2}{\rho} \right)^{1/2} d\rho, \\ \Lambda_2(\delta) &= \int_0^{\delta_1} \left(\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta} \right)^{1/2} d\delta, \\ \Lambda_3(\gamma) &= \alpha_3 \lambda,\end{aligned}$$

мұнда $\rho_1 - 2\alpha_1 \rho^2 + 2M_0^2 \rho - \alpha_2^2 = 0$ теңдеуінің ең кіші түбірі, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – кез-келген тұрақтылар,

$$M_0 = f[m_1(t_0) + m_2(t_0)] = const.$$

Енді айналмалы қозғалыс үшін Гамильтон-Якоби теңдеуін жазайық

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H_0^{ep} = 0,$$

толық интегралы келесідей болады

$$S' = -\alpha'_1 \int_{t_0}^t \frac{1}{v^2(t)} dt + \frac{\mu v \dot{v}}{2} \varphi^2 + \Lambda'_1(\varphi) + \Lambda'_2(\theta) + \Lambda'_3(\psi),$$

$$\Lambda'_1(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \left(2\mu_0 \alpha'_1 - \frac{\alpha'^2_2}{\varphi^2} + \frac{2v^2}{\varphi} \right)^{1/2} d\varphi,$$

$$\Lambda'_2(\theta) = \int_0^{\delta} \left(\alpha'^2_2 - \frac{\alpha'^2_3}{\cos^2 \theta} \right)^{1/2} d\theta,$$

$$\Lambda'_3(\psi) = \alpha'_3 \psi,$$

мұнда $\varphi_1 - 2\alpha'_1 \varphi^2 + 2M_0^2 \varphi - \alpha'^2_2 = 0$ теңдеуінің ең кіші түбірі, $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ – кез-келген тұрақтылар. Нәтижесінде (2.31), (2.32)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} &= \beta_1, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= \beta_3, \\ \frac{\partial S}{\partial \rho} &= P_\rho, & \frac{\partial S}{\partial \delta} &= P_\delta, & \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= P_\lambda, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha'_1} &= \beta'_1, & \frac{\partial S}{\partial \alpha'_2} &= \beta'_2, & \frac{\partial S}{\partial \alpha'_3} &= \beta'_3, \\ \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= P_\varphi, & \frac{\partial S}{\partial \theta} &= P_\theta, & \frac{\partial S}{\partial \psi} &= P_\psi, \end{aligned}$$

болады, мұндағы $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ – жаңа тұрақтылар. Онда жүйенің жалпы интегралын келесі түрде аламыз:

$$\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\sqrt{2\alpha_1 + 2f \frac{M_0}{\rho^2} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} &= \int_{t_0}^t \frac{dt}{v^2} + \beta_1, \\ \alpha_2 \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta}}} - \alpha_2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho^2 \sqrt{2\alpha_1 + 2f \frac{M_0}{\rho^2} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} &= \beta_2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int_0^\delta \frac{d\delta}{\cos^2 \delta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta}}} = \beta_3,$$

$$P_\rho = v\dot{\rho} + \sqrt{2\alpha_1 + 2f \frac{M_0}{\rho^2} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}, \quad P_\delta = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta}}, \quad P_\lambda = \alpha_3,$$

$$A_0 \int_{\theta_0}^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Omega(\theta)}} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{m\chi^2} + \beta'_1, \quad A_0 = A(t), \quad C_0 = C(t_0)$$

$$\psi - \int_{\theta_0}^\theta \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Omega(\theta)}} \left(\frac{\alpha'_3 - \alpha'_2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\} d\theta = \beta'_3 \quad (2.34)$$

$$\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Omega(\theta)}} \left(-\frac{A_0}{C_0} \alpha'_2 + \frac{(\alpha'_3 - \alpha'_2 \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\} d\theta = \beta'_2$$

$$P_\psi = \alpha'_3, \quad P_\varphi = \alpha'_2, \quad P_\theta = \sqrt{\Omega(\theta)},$$

мұнда

$$\Omega(\theta) = 2A_0\alpha'_1 + \frac{A_0}{C_0}\alpha'_2 - \frac{(\alpha'_3 - \alpha'_2 \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}, \quad (2.35)$$

(2.33), (2.34), (2.35) формулалардағы интегралдау тұрақтылары

$$\alpha_k, \beta_k, \alpha'_k, \beta'_k, \quad k=1,2,3 \quad (2.36)$$

сәйкес стационар есепте болатын Якоби элементтерінің аналогы [5,16]. Якоби элементтерінің аналогы мен кеплер элементтерінің байланыс формулалары

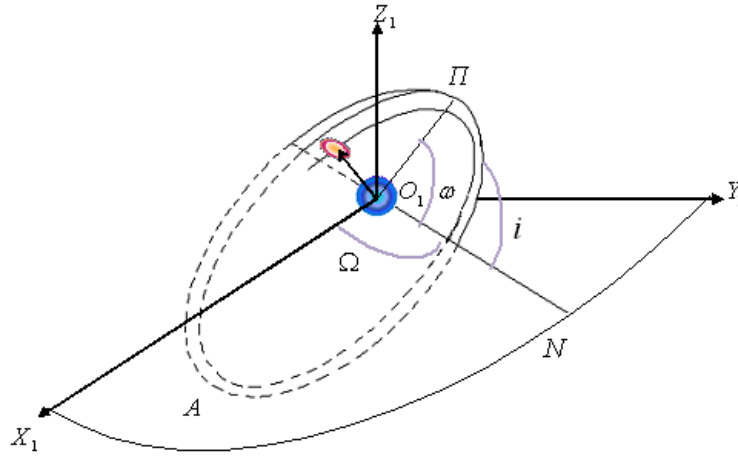
$$-2\alpha_1 = \frac{\beta^2}{\tilde{m}_0 a}, \quad \alpha_2 = \beta\sqrt{p}, \quad \alpha_3 = \beta\sqrt{p} \cos i, \quad (2.37)$$

$$\beta_1 = -\phi(\tau), \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega,$$

болады, мұндағы

$$a, \quad e, \quad \omega, \quad \Omega, \quad i, \quad \phi(\tau) \quad (2.38)$$

орбита элементтері – сәйкесінше кеплер элементтер аналогы.



Сурет 2.4 – Орбита элементтері

2.4 суретте негізгі жазықтық пен орбита жазықтығы O_1N түйін сызығында қиылысады; A – апоцентр аналогы; P – перицентр аналогы; a – эллипстің үлкен радиус аналогы, b – эллипстің кіші радиус аналогы; $p = a(1 - e^2)$; $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ – эксцентриситет аналогы; ω – перицентр мен түйін сызығының арасындағы бұрыш; $\phi(\tau)$ – нүктенің эллипс бойында қозғалып келе жатып перицентрден өту моменті; i – орбита жазықтығының негізгі жазықтыққа көлбеулік бұрышы; Ω – түйіндер сызығының белгілі қабылданған қашықтықтан бұрыштық қашықтығы; n – орташа қозғалыс; M – орташа аномалия.

Сонымен қатар (2.37)

$$R = v(t)\rho, \quad \rho = \rho(t) = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad p = a(1 - e^2),$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad v = u - \omega. \quad (2.39)$$

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}(t) = \frac{1}{\mu_0(t)v^2(t)} \cdot \frac{M_0}{\sqrt{p}} e \sin v, \quad (2.40)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\mu_0(t)v^2(t)} \cdot \frac{M_0 \sqrt{p}}{\rho^2}, \quad (2.41)$$

мұндағы ν – ақиқат аномалия, a, e, ω – ұйытқымаған қозғалыстың орбита элементтері.

(2.39)-(2.41) қатынастарынан белгілі

$$\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} (E - e\sin E), \quad (2.42)$$

$$= \frac{M}{(1-e^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{M_0}}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}} [\Phi(t) - \Phi(\tau)]$$

жоғарыда атап өтілгендей, мұндағы $\Phi(t)$ функциясы – $[\nu(t)]^{-2}$ функциясының алғашқы функциясы, τ – екінші дене перицентрден өткен кездегі уақыты, M – орташа аномалия.

Қарастырылған аралық қозғалыстың – квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыстың жалпы талдауы орындалған. Квазиэллипстік қозғалыс жағдайында

$$e < 1, \quad (2.43)$$

және эксцентрлік аномалия мен ақиқат аномалияның байланысы келесі түрде болады

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (2.44)$$

Координаталар мен жылдамдықтарды $\mu(t)$ келтірілген массамен былай жазуға болады (2.16),

$$\begin{aligned} x &= \nu\rho [\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i], \\ y &= \nu\rho [\cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i], \\ z &= \nu\rho [\sin u \cdot \sin i], \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \nu^2 \rho^2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\frac{\dot{\nu}}{\nu} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) x + \nu\rho\dot{u} [-\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i], \\ \dot{y} &= \left(\frac{\dot{\nu}}{\nu} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) y + \nu\rho\dot{u} [-\sin u \cdot \sin \Omega + \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i], \\ \dot{z} &= \left(\frac{\dot{\nu}}{\nu} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) z + \nu\rho\dot{u} [\cos u \cdot \sin i]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.4 Оскуляциялаушы Якоби элементтері аналогындағы ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеулері

Қарапайымдалған (2.31) мен (2.32) теңдеулер жүйесі ұйытқымаған ілгерілемелі-айналмалы қозғалысты сипаттайды деп айтып кеттік. Енді $H_{1\theta 03}^{номт} \neq 0$, $H_{1\theta 03}^{ep} \neq 0$ жағдайында (2.24), (2.30) ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының теңдеулерін Якоби элементтерінің (2.36) оскуляциялаушы аналогтарында келесі дифференциалдық теңдеулер ретінде қарастырамыз:

$$\dot{\alpha}_k = \frac{\partial(-H_{1\theta 03}^{номт})}{\partial \beta_k}, \quad \dot{\beta}_k = -\frac{\partial(-H_{1\theta 03}^{номт})}{\partial \alpha_k}, \quad k=1,2,3. \quad (2.47)$$

$$\dot{\alpha}'_k = \frac{\partial(-H_{1\theta 03}^{ep})}{\partial \beta'_k}, \quad \dot{\beta}'_k = -\frac{\partial(-H_{1\theta 03}^{ep})}{\partial \alpha'_k}, \quad k=1,2,3. \quad (2.48)$$

бұл жерде (2.47), (2.48) теңдеулерінде анықталған $H_{1\theta 03}^{номт}$ және $H_{1\theta 03}^{ep}$ жаңа канондық айнымалылар арқылы қайта өрнектелуі тиіс.

2.5 Делоне-Андруайе элементтерінің аналогындағы ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеулері

(2.47) теңдеулері оскуляциялаушы Якоби элементтерінің аналогында үш өсті дененің инерция центрінің ұйытқыған ілгерілемелі қозғалысын, ал (2.48) теңдеулері сәйкесінше оскуляциялаушы Якоби элементтерінің аналогында осы дененің инерция центрі төңірегіндегі айналымды ұйытқыған қозғалысын сипаттайды. Якоби элементтерінің аналогтары арқылы классикалық ұйытқу теориясындағыдай дененің орбиталық және айналымды қозғалысын сипаттау ыңғайлы, себебі олар қозғалыстың геометриясын жақсы көрсетеді (мысалы, орбита пішіні, көлбеуі, т.б.). Бірақ олармен жұмыс істегенде ұйытқуларды жүйелі түрде зерттеу қиынға соғады. Бұл жағдайда теңдеулер өте күрделі болып кетуі мүмкін. Сондықтан ұйытқыған қозғалысты тереңірек зерттеп, аналитикалық және сандық әдістермен шешімдерін алу үшін Делоне-Андруайе элементтерінің аналогтарына өткен орынды болады [5,11,15,17].

Әрі қарай, қозғалысты Делоне-Андруайе элементтерінің аналогтарында қарастырамыз

$$L, \quad G, \quad H, \quad l, \quad g, \quad h \quad (2.49)$$

$$L', \quad G', \quad H', \quad l', \quad g', \quad h' \quad (2.50)$$

Келесі формулалар арқылы Якоби элементтерінің аналогтарынан Делоне-Андуайе элементтер аналогына (2.49), (2.50) көшеміз. Делоне айнымалылары мен Якоби айнымалылар аналогтарының арасындағы байланыстар

$$-\alpha_1 = \frac{M_0^2}{2L^2}, \quad \alpha_2 = G, \quad \alpha_3 = H, \quad (2.51)$$

$$\beta_1 = \frac{L^3}{M_0^2} l - \Phi_1(t), \quad \beta_2 = g, \quad \beta_3 = h. \quad (2.52)$$

Андуайе айнымалылары мен Якоби айнымалылар аналогтарының арасындағы байланыстар

$$L' = \alpha'_2, \quad G' = \left(2\alpha'_1 A_0 + \frac{C_0 - A_0}{C_0} \alpha'^2_2 \right)^{1/2}, \quad H' = \alpha'_3, \quad (2.53)$$

$$g' = \frac{G'}{A_0} [\Phi_2(t) + \beta'_1], \quad h' = \beta'_3, \quad (2.54)$$

$$l' = \frac{A_0 - C_0}{A_0 C_0} \alpha_2 [\Phi_2(t) + \beta'_1] + \beta'_2, \quad (2.55)$$

болады, мұндағы $\Phi_1(t)$ және $\Phi_2(t)$ - сәйкесінше $\nu^{-2}(t)$ және $m^{-1}(t)\chi^{-2}(t)$ алғашқы функциялары.

(2.49), (2.50) оскуляциялаушы элементтердегі канондық қозғалыс теңдеулері келесідей

$$\dot{L} = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \dot{G} = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \dot{H} = \frac{\partial F}{\partial h}, \quad (2.56)$$

$$\dot{l} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \quad \dot{h} = -\frac{\partial F}{\partial H},$$

$$F = \frac{1}{\nu^2} \frac{\mu_0^2}{2L^2} - H_{1603}^{пост} \quad (2.57)$$

$$H_{1603}^{пост} = -\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} U_2 - \frac{1}{2} b R^2 \right), \quad (2.58)$$

$$\dot{L}' = \frac{\partial F'}{\partial l'}, \quad \dot{G}' = \frac{\partial F'}{\partial g'}, \quad \dot{H}' = \frac{\partial F'}{\partial h'}, \quad (2.59)$$

$$\dot{l}' = -\frac{\partial F'}{\partial L'}, \quad \dot{g}' = -\frac{\partial F'}{\partial G'}, \quad \dot{h}' = -\frac{\partial F'}{\partial H'},$$

$$F' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m\chi^2} \left[\frac{G'^2}{A_0} + \frac{A_0 - C_0}{A_0 C_0} L'^2 \right] \right) - H_{1\theta 03}^{ep} . \quad (2.60)$$

$$H_{1\theta 03M}^{ep} = \frac{1}{2} \left(\frac{B-A}{A^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \\ \times \left[(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \cos \varphi - P_\theta \sin \varphi \sin \theta \right]^2 - \left(U_2 - \frac{1}{2} b R^2 \right) \quad (2.61)$$

мұндағы (2.56), (2.59) ұйытқытушы функциялар (2.49), (2.50) оскуляциялаушы элементтер арқылы өрнектелу керек екендігін ескерейік.

2.5.1 Делоне-Андуайе элементтерінің аналогындағы ұйытқымаған ілгерілемелі қозғалыс теңдеулері

Егер (2.57) теңдеудегі ұйытқышы функция нөлге тең болса $H_{1\theta 03M}^{пост} = 0$, онда

$$F = F_{н\theta} = \frac{1}{v^2(t)} \cdot \frac{\mu_0^2}{2L^2}. \quad (2.62)$$

үш өсті дененің инерция центрінің Делоне айнымалылар аналогындағы (2.49) ұйытқымаған ілгерілемелі қозғалысының теңдеуі келесі түрде болады

$$\dot{l} = -\frac{\partial F_{н\theta}}{\partial L}, \quad \dot{g} = 0, \quad \dot{h} = 0, \quad (2.63) \\ \dot{L} = 0, \quad \dot{G} = 0, \quad \dot{H} = 0.$$

Ұйытқымаған ілгерілемелі қозғалыс Делоне элементтерінің аналогтарында квазиконусты қима бойымен аperiодтық қозғалыстың ұйытқымаған теңдеулерімен анықталады. (2.63) жүйесінің интегралдарын келесі түрде алуға болады

$$L = L_0 = const, \quad G = G_0 = const, \quad H = H_0 = const, \quad (2.64)$$

$$l = \frac{M_0^2}{L^3} \int_{t_0}^t \frac{dt}{v^2(t)} + l_0, \quad l_0 = const, \quad g = g_0 = const, \quad h = h_0 = const, \quad (2.65)$$

2.5.2 Делоне-Андуайе элементтерінің аналогындағы ұйытқымаған айналмалы қозғалыс теңдеулері

Егер (2.60) теңдеудегі ұйытқышы функция нөлге тең болса $H_{1603M}^{ep} = 0$, онда

$$F' = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{m\chi^2} \left[\frac{G'^2}{A_0} + \frac{A_0 - C_0}{A_0 C_0} L'^2 \right] \right\} \quad (2.66)$$

Андуайе айнымалылар аналогындағы ұйытқымаған айналмалы қозғалыс теңдеуі келесі түрде болады

$$\begin{aligned} \dot{L}' &= 0, & \dot{G}' &= 0, & \dot{H}' &= 0, \\ \dot{l}' &= -\frac{\partial F'}{\partial L'}, & \dot{g}' &= -\frac{\partial F'}{\partial G'}, & \dot{h}' &= 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

(2.67) теңдеуден

$$L' = L'_0 = \text{const}, \quad G' = G'_0 = \text{const}, \quad H' = H'_0 = \text{const}, \quad (2.69)$$

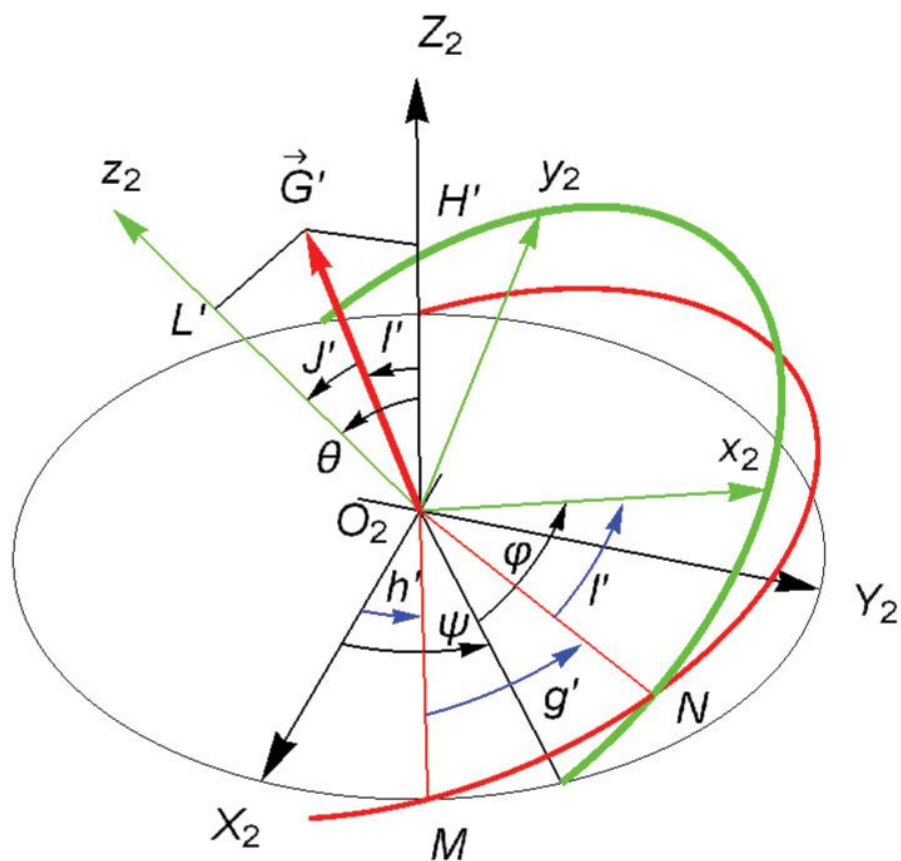
$$l' = \frac{A_0 - C_0}{A_0 C_0} L'_0 \int_{t_0}^t \frac{dt}{m\chi^2} + l'_0, \quad l'_0 = \text{const}, \quad (2.70)$$

$$g' = \frac{G'_0}{A_0} \int \frac{dt}{m\chi^2} + g'_0, \quad g'_0 = \text{const}, \quad h' = h'_0 = \text{const},$$

шығады. Андудайе айнымалылар аналогының

$$L', \quad G', \quad H', \quad l', \quad g', \quad h'. \quad (2.71)$$

геометриялық мағынасы 2.5 суретте көрсетілген



Сурет 2.5 - Андуайе айнымалылары

2.5 суретте келесідей белгілеулер қабылданған:

1. $O_2X_2Y_2Z_2$ - өстері абсолют координаталар жүйесінің өстеріне параллель болатын айналмайтын кениг координаттар жүйесі;
2. $O_2x_2y_2z_2$ - кенигтің меншікті координаталар жүйесі, оның өстері үш өсті дененің негізгі инерция өстері бойымен бағытталған, денемен қатаң байланысқан және онымен бірге айналады;
3. O_2NM - кинетикалық момент векторына $\vec{G}'$ перпендикуляр, координаталар басы (барицентр) арқылы өтетін жазықтық;
4. O_2M - $O_2X_2Y_2Z_2$ айналмайтын координаттар жүйесінің $O_2X_2Y_2$ жазықтығының кинетикалық момент векторына $\vec{G}'$ перпендикуляр, координаталар басы арқылы өтетін O_2MN жазықтығымен қиылысу сызығы;
5. O_2N - $O_2x_2y_2z_2$ айналатын координаттар жүйесінің $O_2x_2y_2$ жазықтығымен кинетикалық момент векторына $\vec{G}'$ перпендикуляр, координаталар басы арқылы өтетін O_2MN жазықтығымен қиылысу сызығы;
6. $G' - \vec{G}'$ кинетикалық момент векторының модулі;

7. L' - үш өсті дененің бас инерция өстерінің біреуі болып табылатын $O_2 z_2$ айналмалы өсіне түсірілген кинетикалық момент векторының $\vec{G}'$ проекциясы;
8. H' - кеңістікте бағытын тұрақты сақтайтын $O_2 Z_2$ өсіне түсірілген кинетикалық момент векторының $\vec{G}'$ проекциясы;
9. l' - $O_2 N$ жазықтығы мен $O_2 x_2$ өсінің қиылысу жазықтықтарының арасындағы бұрыш;
9. g' - $O_2 M$ мен $O_2 N$ қиылысу сызықтарының арасындағы бұрыш;
10. h' - $O_2 X_2$ өсімен $O_2 M$ қиылысу сызығы арасындағы бұрыш.

2.6 Оскуляциялаушы элементтер арқылы күштік функцияны жіктеу

Ұйытқыған қозғалыстың теңдеулерін айқын түрде алу үшін, ұйытқытушы функцияларды (2.49) және (2.50) Делоне–Андуайе элементтері арқылы қайта жазу қажет. Өртүрлі канондық айнымалылар жүйелері арасындағы өзара байланысты ескере отырып [17,19], бұл функцияларды келесі түрде өрнектеуге болады

$$F = \frac{1}{\nu^2} \frac{\mu_0^2}{2\mu_0 L^2} + \left\{ -\frac{1}{2} b R^2 + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} f m_1 \frac{A + B + C - 3\tilde{I}}{2R^3} \right\}, \quad (2.72)$$

$$F' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{m \chi^2} \left[\frac{G'^2}{A_0} + \frac{A_0 - C_0}{A_0 C_0} L'^2 \right] \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{B - A}{A^2} \right) \frac{[(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \cos \varphi - P_\theta \sin \varphi \sin \theta]^2}{\sin^2 \theta} - \left(f m_1 \frac{A + B + C - 3\tilde{I}}{2R^3} - \frac{1}{2} b R^2 \right). \quad (2.73)$$

$$\tilde{I} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \quad (2.74)$$

p, q, r және φ, ψ, θ Эйлер бұрыштарының және a_{ij} бағыттаушы косинустарды Андуайе айнымалыларымен келесідей байланыста болады:

$$p = \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{A} \sin l', \quad q = \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{B} \cos l', \quad r = \frac{L'}{C},$$

Сонда

$$\begin{aligned} & \frac{[(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \cos \varphi - P_\theta \sin \varphi \sin \theta]^2}{\sin^2 \theta} = \\ & = (Bq^2) = B^2 \left(\frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{B} \cos l' \right)^2 = (G'^2 - L'^2) \cos^2 l' \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{B-A}{A^2} \right) \frac{[(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \cos \varphi - P_\theta \sin \varphi \sin \theta]^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{B-A}{A^2} \right) (G'^2 - L'^2) \cos^2 l'$$

Онда айналмалы қозғалыс үшін алынған ұйытқытушы функция (2.61) келесі түрге түрленеді

$$H_{1603M}^{ep} = \frac{1}{2} \left(\frac{B-A}{A^2} \right) (G'^2 - L'^2) \cos^2 l' - \left\{ U_2 - \frac{1}{2} b R^2 \right\} \quad (2.76)$$

Енді (2.72), (2.73) формулаларындағы жүйелі жақшалардағы шамаларды Делоне-Андуайе элементтері арқылы өрнектеу қажет. (2.74) формуладағы α , β , γ - бейстационар үш өсті дененің өзіндік координаттар жүйесіне қатысты денелердің массалар центрін қосатын $\vec{R} = v\vec{\rho}$ векторының бағыттауыш косинустары (2.17) өрнектермен анықталатын ескерейік. Сәйкесінше, $\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}$ – $\vec{R}$ векторының $O_2x_2y_2z_2$ координаттар жүйесінің айналмайтын өстеріне қатысты бағыттауыш косинустары (2.46) теңдеуден шығады

$$\begin{aligned} \frac{x}{R} &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \frac{y}{R} &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \frac{z}{R} &= \sin u \sin i, \quad R = v\rho, \quad u = \nu + \omega, \quad \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Сонда a_{ij} – $O_2x_2y_2z_2$ қозғалмалы және $O_2X_2Y_2Z_2$ қозғалмайтын координаттар жүйелерінің арасындағы бұрыштардың косинустары. Андудайе айнымалылар аналогында бағыттауыш косинустар a_{ij} келесідей өрнектеледі [14,17]

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cosh' \cos g' \cos l' - \cosh' \cos J' \sin g' \sin l' - \sinh' \cos I' \cos l' \sin g' - \\
&- \sinh' \cos I' \cos g' \cos J' \sin l' + \sinh' \sin I' \sin l' \sin J', \\
a_{21} &= \sinh' \cos g' \cos l' - \sinh' \cos J' \sin g' \sin l' + \cosh' \cos I' \cos l' \sin g' + \\
&+ \cosh' \cos I' \cos g' \cos J' \sin l' - \cosh' \sin I' \sin l' \sin J', \\
a_{31} &= \sin I' \sin g' \cos l' + \sin I' \cos J' \cos g' \sin l' - \cos I' \sin l' \sin J',
\end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -\cosh' \cos J' \cos l' \sin g' - \cosh' \cos g' \sin l' - \sinh' \cos I' \cos g' \cos l' \cos J' + \\
&+ \sinh' \cos I' \sin g' \sin l' + \sinh' \sin I' \cos l' \sin J', \\
a_{22} &= -\sinh' \cos J' \cos l' \sin g' - \sinh' \cos g' \sin l' + \cosh' \cos I' \cos g' \cos l' \cos J' - \\
&- \cosh' \cos I' \sin g' \sin l' - \cosh' \sin I' \cos l' \sin J', \\
a_{32} &= \sin I' \cos J' \cos l' \cos g' - \sin I' \sin g' \sin l' + \cos I' \cos l' \sin J',
\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= \cosh' \sin J' \sin g' - \sinh' \sin I' \cos J' + \sinh' \cos I' \cos g' \sin J', \\
a_{23} &= \sinh' \sin J' \sin g' - \cosh' \sin I' \cos J' - \cosh' \cos I' \cos g' \sin J', \\
a_{33} &= \cos I' \cos J' - \sin I' \cos g' \sin J',
\end{aligned} \tag{2.80}$$

мұндағы

$$\cos I' = \frac{H'}{G'}, \quad \sin I' = \sqrt{1 - \frac{H'^2}{G'^2}}, \quad \cos J' = \frac{L'}{G'}, \quad \sin J' = \sqrt{1 - \frac{L'^2}{G'^2}}. \tag{2.81}$$

(2.73) формуланы келесі түрде қайта жазайық

$$\begin{aligned}
U_2 &= fm_1 \frac{A + B + C - 3(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)}{2R^3} = \\
&= \frac{fm_1(A + B + C)}{2} \left[\frac{1}{R^3} \right] - \frac{3fm_1A}{2} \left[\frac{\alpha^2}{R^3} \right] - \frac{3fm_1B}{2} \left[\frac{\beta^2}{R^3} \right] - \frac{3fm_1C}{2} \left[\frac{\gamma^2}{R^3} \right].
\end{aligned} \tag{2.82}$$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ белгілі қатынасты пайдаланып

$$\alpha^2 = 1 - \beta^2 - \gamma^2 \tag{2.83}$$

табамыз. Соңғы формуланы (2.82) теңдіктің оң жағына қойып

$$\begin{aligned}
U_2 &= fm_1 \frac{A+B+C-3(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)}{2R^3} = \frac{fm_1}{2R^3} (A+B+C) - \\
&- \frac{3fm_1A}{2} \left\{ \frac{1}{R^3} \right\} - \frac{3fm_1A}{2} \left\{ -\frac{\beta^2}{R^3} \right\} - \frac{3fm_1B}{2} \left\{ \frac{\beta^2}{R^3} \right\} - \frac{3fm_1A}{2} \left\{ -\frac{\gamma^2}{R^3} \right\} - \frac{3fm_1C}{2} \left\{ \frac{\gamma^2}{R^3} \right\} = \\
&= \left[\frac{fm_1(A+B+C)}{2} - \frac{3fm_1A}{2} \right] \left\{ \frac{1}{R^3} \right\} + \left[\frac{3fm_1A}{2} - \frac{3fm_1B}{2} \right] \left\{ \frac{\beta^2}{R^3} \right\} + \left[\frac{3fm_1A}{2} - \frac{3fm_1C}{2} \right] \left\{ \frac{\gamma^2}{R^3} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

аламыз.

Онда

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}bR^2 + U_2 &= -\frac{1}{2}b\{R^2\} + \left[\frac{1}{2}fm_1(B+C-2A) \right] \left\{ \frac{1}{R^3} \right\} + \\
&+ \left[\frac{3}{2}fm_1(A-B) \right] \left\{ \frac{\beta^2}{R^3} \right\} + \left[\frac{3}{2}fm_1(A-C) \right] \left\{ \frac{\gamma^2}{R^3} \right\}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

жаза аламыз.

(2.85) формуладағы жүйелі жақшадағы өрнектерді Делоне-Андруайе айнымалылары арқылы өрнектеу қажет. Келесідей белгілеулер жасайық

$$W_1 = R^2 = v^2 \rho^2 = v^2 \left(\frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos v)^2} \right) \tag{2.86}$$

$$W_2 = R^3 = v^3 \rho^3 = v^3 \left(\frac{a^3(1-e^2)^3}{(1+e\cos v)^3} \right) \tag{2.87}$$

$$W_3 = \frac{\beta^2}{R^3} = \frac{1}{v^3} \cdot \frac{\beta^2}{\rho^3} = \frac{1}{v^3} \frac{(1+e\cos v)^3}{a^3(1-e^2)^3} \left(a_{12} \frac{x}{R} + a_{22} \frac{y}{R} + a_{32} \frac{z}{R} \right)^2 \tag{2.88}$$

$$W_4 = \frac{\gamma^2}{R^3} = \frac{1}{v^3} \cdot \frac{\gamma^2}{\rho^3} = \frac{1}{v^3} \frac{(1+e\cos v)^3}{a^3(1-e^2)^3} \left(a_{13} \frac{x}{R} + a_{23} \frac{y}{R} + a_{33} \frac{z}{R} \right)^2 \tag{2.89}$$

Есептеу ыңғайлы болу үшін (2.78)-(2.80) формулаларды

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \kappa_{11} \sin l' + \kappa_{12} \sin g' \sin l' + \kappa_{13} \sin g' \cos l' + \kappa_{14} \cos g' \sin l' + \kappa_{15} \cos g' \cos l', \\
a_{21} &= \kappa_{21} \sin l' + \kappa_{22} \sin g' \sin l' + \kappa_{23} \sin g' \cos l' + \kappa_{24} \cos g' \sin l' + \kappa_{25} \cos g' \cos l', \\
a_{31} &= \kappa_{31} \sin l' + \kappa_{32} \sin g' \cos l' + \kappa_{33} \cos g' \sin l',
\end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &= \frac{\sqrt{(G'^2 - H'^2)(G'^2 - L'^2)}}{G'^2} \sinh', & \kappa_{12} &= -\frac{L'}{G'} \cosh', & \kappa_{13} &= -\frac{H'}{G'} \sinh', & \kappa_{14} &= -\frac{L'H'}{G'^2} \sinh', & \kappa_{15} &= \cosh', \\
\kappa_{21} &= \frac{\sqrt{(G'^2 - H'^2)(G'^2 - L'^2)}}{G'^2} \cosh', & \kappa_{22} &= -\frac{L'}{G'} \sinh', & \kappa_{23} &= \frac{H'}{G'} \cosh', & \kappa_{24} &= \frac{L'H'}{G'^2} \cosh', & \kappa_{25} &= \sinh', \\
\kappa_{31} &= -\frac{H'}{G'} \sqrt{1 - \frac{L'^2}{G'^2}}, & \kappa_{32} &= \sqrt{1 - \frac{H'^2}{G'^2}}, & \kappa_{33} &= \frac{L'}{G'} \sqrt{1 - \frac{H'^2}{G'^2}}.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \sigma_{11} \cos l' + \sigma_{12} \sin g' \sin l' + \sigma_{13} \sin g' \cos l' + \sigma_{14} \cos g' \sin l' + \sigma_{15} \cos g' \cos l', \\
a_{22} &= \sigma_{21} \cos l' + \sigma_{22} \sin g' \sin l' + \sigma_{23} \sin g' \cos l' + \sigma_{24} \cos g' \sin l' + \sigma_{25} \cos g' \cos l', \\
a_{32} &= \sigma_{31} \cos l' + \sigma_{32} \sin g' \sin l' + \sigma_{33} \cos g' \cos l',
\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\sqrt{(G'^2 - H'^2)(G'^2 - L'^2)}}{G'^2} \sinh', & \sigma_{12} &= \frac{H'}{G'} \sinh', & \sigma_{13} &= \frac{L'}{G'} \cosh', & \sigma_{14} &= -\cosh' & \sigma_{15} &= -\frac{L'H'}{G'^2} \sinh', \\
\sigma_{21} &= \frac{\sqrt{(G'^2 - H'^2)(G'^2 - L'^2)}}{G'^2} \cosh', & \sigma_{22} &= -\frac{H'}{G'} \cosh', & \sigma_{23} &= -\frac{L'}{G'} \sinh', & \sigma_{24} &= -\sinh' & \sigma_{25} &= \frac{L'H'}{G'^2} \cosh', \\
\sigma_{31} &= -\frac{H'}{G'} \sqrt{1 - \frac{L'^2}{G'^2}}, & \sigma_{32} &= -\sqrt{1 - \frac{H'^2}{G'^2}} & \sigma_{33} &= \frac{L'}{G'} \sqrt{1 - \frac{H'^2}{G'^2}}.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} \sin g' + \varepsilon_{13} \cos g', \\
a_{23} &= \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} \sin g' + \varepsilon_{23} \cos g', \\
a_{33} &= \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} \cos g',
\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{L' \sqrt{G'^2 - H'^2}}{G'^2} \sinh', & \varepsilon_{12} &= \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{G'} \cosh', & \varepsilon_{13} &= \frac{H' \sqrt{G'^2 - L'^2}}{G'^2} \sinh', \\
\varepsilon_{21} &= \frac{L' \sqrt{G'^2 - H'^2}}{G'^2} \cosh', & \varepsilon_{22} &= -\frac{\sqrt{G_i'^2 - L_i'^2}}{G_i'} \sinh', & \varepsilon_{23} &= \frac{H_i' \sqrt{G'^2 - L'^2}}{G_i'^2} \cosh', \\
\varepsilon_{31} &= \frac{L'H'}{G'^2}, & \varepsilon_{33} &= -\frac{\sqrt{(G'^2 - H'^2)(G'^2 - L'^2)}}{G'^2}.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

түрінде жазайық. Сәйкесінше $\vec{R}$ векторының бағыттауыш косинустарын (2.77) келесі түрде қайта жазамыз

$$\frac{x}{R} = \tau_{11} \sin \nu + \tau_{12} \cos \nu, \quad \frac{y}{R} = \tau_{21} \sin \nu + \tau_{22} \cos \nu, \quad \frac{z}{R} = \tau_{31} \sin \nu + \tau_{32} \cos \nu, \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= -\cosh \sin g - \frac{H}{G} \sinh \cos g, & \tau_{12} &= \cosh \cos g - \frac{H}{G} \sinh \sin g, \\
\tau_{21} &= -\sinh \sin g + \frac{H}{G} \cosh \cos g, & \tau_{22} &= \sinh \cos g + \frac{H}{G} \cosh \sin g, \\
\tau_{31} &= \cos g \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}}, & \tau_{32} &= \sin g \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}},
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Аналитикалық және сандық есептеулерде нәтижелерді тексеру үшін белгілі қатынасты пайдалануға болады

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{z}{R}\right)^2 = 1.$$

Уақытты қажет ететін және ауқымды алгебралық (аналитикалық) есептеулер Mathematica символдық есептеу жүйесі арқылы орындалды. [18]

(2.76) ескергенде алған формулалар Делоне-Андуайе элементтері бойынша ұйытқытушы функциясының айқын өрнектерін береді.

2.7 Резонанс болмаған жағдайда ұйытқыған қозғалыстың эволюциялық теңдеулерін орташалау және ғасырлық ұйытқу теңдеулерін алу

(2.72), (2.73) теңдеулерін резонанс болмаған жағдайда l мен l' жылдам айнымалылары арқылы Гаусс схемасы бойынша орташалап ғасырлық ұйытқу теңдеулерін аламыз [57]. F пен F' ұйытқытушы функциялардың ғасырлық бөлігін алу үшін келесі түрдегі интегралды есептеу қажет [1,11]

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F dl dl' = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F}{(1+e \cos v)^2} dv dl' \tag{2.98}$$

мұнда l бұрышы бойынша интегралдауды v ақиқат аномалия бойынша интегралдауға ауыстырған дұрыс екенін ескерейік. Сонда (2.86)-(2.89) бір рет орташалағанда

$$\tilde{W}_1 = v^2 a^2 (1-e^2)^2 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{(1+e \cos v)^2} \right\} \tag{2.99}$$

$$\tilde{W}_2 = v^2 a^3 (1-e^2)^3 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{(1+e \cos v)^3} \right\} \tag{2.100}$$

$$\tilde{W}_3 = \frac{1}{\nu^3 a^3 (1-e^2)^3} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_{12} \frac{x}{R} + a_{22} \frac{y}{R} + a_{32} \frac{z}{R} \right)^2 (1 + e \cos \nu)^3 dl \right\} \quad (2.101)$$

$$\tilde{W}_4 = \frac{1}{\nu^3 a^3 (1-e^2)^3} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_{13} \frac{x}{R} + a_{23} \frac{y}{R} + a_{33} \frac{z}{R} \right)^2 (1 + e \cos \nu)^3 dl \right\} \quad (2.102)$$

болады. Ары қарай (2.99)-(2.102) шамаларды l' бойынша орташалаймыз. Бұл теңдіктерден

$$\tilde{W}_1 = \nu^2 a^2 (1-e^2)^2 Q_1, \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{(1 + e \cos \nu)^2}, \quad (2.103)$$

$$\tilde{\tilde{W}}_1 = \nu^2 a^2 (1-e^2)^2 \tilde{Q}_1, \quad (2.104)$$

$$\tilde{Q}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_1 dl' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{(1 + e \cos \nu)^2} \right) dl' \quad (2.105)$$

$$\tilde{W}_2 = \nu^2 a^3 (1-e^2)^3 Q_2, \quad Q_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{(1 + e \cos \nu)^3} \quad (2.106)$$

$$\tilde{\tilde{W}}_2 = \nu^2 a^2 (1-e^2)^2 \tilde{Q}_2, \quad (2.107)$$

$$\tilde{Q}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_2 dl' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{(1 + e \cos \nu)^3} \right) dl' \quad (2.108)$$

$$\tilde{W}_3 = \frac{1}{\nu^3 a^3 (1-e^2)^3} Q_3, \quad Q_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_{12} \frac{x}{R} + a_{22} \frac{y}{R} + a_{32} \frac{z}{R} \right)^2 (1 + e \cos \nu)^3 dl \quad (2.109)$$

$$\tilde{\tilde{W}}_3 = \nu^2 a^2 (1-e^2)^2 \tilde{Q}_3, \quad (2.110)$$

$$\tilde{Q}_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_3 dl' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_{12} \frac{x}{R} + a_{22} \frac{y}{R} + a_{32} \frac{z}{R} \right)^2 (1 + e \cos \nu)^3 dl \right) dl' \quad (2.111)$$

$$\tilde{W}_4 = \frac{1}{\nu^3 a^3 (1-e^2)^3} Q_4, \quad Q_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_{13} \frac{x}{R} + a_{23} \frac{y}{R} + a_{33} \frac{z}{R} \right)^2 (1 + e \cos \nu)^3 dl \quad (2.112)$$

$$\tilde{\tilde{W}}_4 = \nu^2 a^2 (1-e^2)^2 \tilde{Q}_4, \quad (2.113)$$

$$\tilde{Q}_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_4 dl' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_{13} \frac{x}{R} + a_{23} \frac{y}{R} + a_{33} \frac{z}{R} \right)^2 (1 + e \cos \nu)^3 dl \right) dl' \quad (2.114)$$

аламыз. Енді (2.103)-(2.114) өрнектерді Делоне-Андруайе айнымалылары арқылы толық өрнектеп жазатын болсақ

$$\tilde{W}_1 = \nu^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) = \frac{\nu^2 L^4}{2M_0^2} \left(5 - 3 \frac{G^2}{L^2}\right) \quad (2.115)$$

$$\tilde{W}_2 = \frac{1}{\nu^3 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} = \frac{M_0^3}{\nu^3 L^3 G^3}, \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_3 = & \frac{M_0^3}{4\nu^3 L^3 G^5} ((G^2 - H^2)(\kappa_{31}^2 + \kappa_{32}^2) + \\ & + G^2[(\kappa_{11} \cosh + \kappa_{21} \sinh)^2 + (\kappa_{12} \cosh + \kappa_{22} \sinh)^2] + \\ & + H^2[(\kappa_{11} \sinh - \kappa_{21} \cosh)^2 + (\kappa_{12} \sinh - \kappa_{22} \cosh)^2] + \\ & + 2GH \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} [(\kappa_{21} \kappa_{31} + \kappa_{22} \kappa_{32}) \cosh - (\kappa_{11} \kappa_{31} + \kappa_{12} \kappa_{32}) \sinh]) \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_4 = & \frac{M_0^3}{2\nu^3 L^3 G^5} (a_{33}^2 (G^2 - H^2) + 2GH \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} (a_{23} a_{33} \cosh - a_{13} a_{33} \sinh) + \\ & + H^2 (a_{23} \cosh - a_{13} \sinh)^2 + G^2 (a_{13} \cosh + a_{23} \sinh)^2) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Нәтижесінде l мен l' жылдам айнымалылары бойынша орташалау нәтижесінде (2.56), (2.59) теңдеулердің оң жағындағы ұйытқытушы функциялардың ғасырлық бөлігін айқын түрде аламыз

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\text{век}} = & \frac{M_0^2}{2\nu^2 L^2} + \frac{f(m_1 + m_2)}{2m_2} ((A - B) (3 \frac{M_0^3}{4\nu^3 L^3 G^5} ((G^2 - H^2)(\kappa_{31}^2 + \kappa_{32}^2) + \\ & + G^2[(\kappa_{11} \cosh + \kappa_{21} \sinh)^2 + (\kappa_{12} \cosh + \kappa_{22} \sinh)^2] + \\ & + H^2[(\kappa_{11} \sinh - \kappa_{21} \cosh)^2 + (\kappa_{12} \sinh - \kappa_{22} \cosh)^2] + \\ & + 2GH \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} [(\kappa_{21} \kappa_{31} + \kappa_{22} \kappa_{32}) \cosh - (\kappa_{11} \kappa_{31} + \kappa_{12} \kappa_{32}) \sinh])) - \frac{M_0^3}{\nu^3 L^3 G^3}) + \\ & + (A - C) (3 \frac{M_0^3}{2\nu^3 L^3 G^5} (a_{33}^2 (G^2 - H^2) + 2GH \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} (a_{23} a_{33} \cosh - a_{13} a_{33} \sinh) + \\ & + H^2 (a_{23} \cosh - a_{13} \sinh)^2 + G^2 (a_{13} \cosh + a_{23} \sinh)^2) - \frac{M_0^3}{\nu^3 L^3 G^3})) - \\ & - \frac{1}{2} b \frac{\nu^2 L^4}{2M_0^2} \left(5 - 3 \frac{G^2}{L^2}\right) \end{aligned} \quad (2.119)$$

және

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{F}}'_{век} = & \left(-\frac{1}{2m\chi^2} \right) \left\{ \frac{1}{A_0} G'^2 + \frac{A_0 - C_0}{A_0 C_0} L'^2 \right\} + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \right) (G'^2 - L'^2) - \frac{1}{2} b \frac{\nu^2 L^4}{2M_0^2} \left(5 - 3 \frac{G^2}{L^2} \right) + \\
& + \frac{fm_1}{2} ((A-B) \left(3 \left(\frac{M_0^3}{4\nu^3 L^3 G^5} ((G^2 - H^2)(\kappa_{31}^2 + \kappa_{32}^2) + \right. \right. \\
& + G^2[(\kappa_{11} \cosh + \kappa_{21} \sinh)^2 + (\kappa_{12} \cosh + \kappa_{22} \sinh)^2] + \\
& + H^2[(\kappa_{11} \sinh - \kappa_{21} \cosh)^2 + (\kappa_{12} \sinh - \kappa_{22} \cosh)^2] + \\
& + 2GH \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} [(\kappa_{21} \kappa_{31} + \kappa_{22} \kappa_{32}) \cosh - (\kappa_{11} \kappa_{31} + \kappa_{12} \kappa_{32}) \sinh] \Big) - \frac{M_0^3}{\nu^3 L^3 G^3} \Big) + \\
& + (A-C) \left(3 \left(\frac{M_0^3}{2\nu^3 L^3 G^5} (a_{33}^2 (G^2 - H^2) + 2GH \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} (a_{23} a_{33} \cosh - a_{13} a_{33} \sinh) + \right. \right. \\
& + H^2 (a_{23} \cosh - a_{13} \sinh)^2 + G^2 (a_{13} \cosh + a_{23} \sinh)^2 \Big) - \frac{M_0^3}{\nu^3 L^3 G^3} \Big)
\end{aligned} \tag{2.120}$$

l мен l' айнымалылары бойынша орташалау нәтижесінде ғасырлық ұйытқу теңдеуі сегіз теңдеумен сипатталады

$$\dot{G} = \frac{\partial \tilde{\tilde{F}}_{век}}{\partial g}, \quad \dot{H} = \frac{\partial \tilde{\tilde{F}}_{век}}{\partial h}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}_{век}}{\partial G}, \quad \dot{h} = -\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}_{век}}{\partial H} \tag{2.121}$$

$$\dot{G}' = \frac{\partial \tilde{\tilde{F}}'_{век}}{\partial g'}, \quad \dot{H}' = \frac{\partial \tilde{\tilde{F}}'_{век}}{\partial h'}, \quad \dot{g}' = -\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}'_{век}}{\partial G'}, \quad \dot{h}' = -\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}'_{век}}{\partial H'} \tag{2.122}$$

Қалған төрт теңдеу (2.121), (2.122) жүйелерді шешкеннен кейін интегралданатын жүйеден бөлініп алынады.

$$\dot{l} = -\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}_{век}}{\partial L}, \quad \dot{L} = 0, \tag{2.123}$$

$$\dot{l}' = -\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}'_{век}}{\partial L'}, \quad \dot{L}' = 0 \tag{2.124}$$

Ары қарай орташаланған ұйытқытушы функцияның ғасырлық бөлігінің теңдеулерін (2.121)-(2.124) теңдеулерді интегралдап, шешімін алу керек.

3 ҒАСЫРЛЫҚ ҰЙЫТҚУ ТЕҢДЕУЛЕРІН САНДЫҚ ТӘСІЛМЕН ШЕШУ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІН АЛУ

3.1 Өлшемсіз айнымалылардағы қозғалыс теңдеулері

(2.121)-(2.124) формулаларындағы $\tilde{F}_{\text{век}}, \tilde{F}'_{\text{век}}$ ғасырлық ұйытқушы функцияларынан сәйкесінше Делоне-Андруайе элементтер аналогтары арқылы дербес туынды алып, үш өсті дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттейтін ғасырлық ұйытқыған теңдеулерін алдық. Массаның уақытқа тәуелділігінен алынған дифференциалдық теңдеулер жүйесін аналитикалық шешу қиын. Дегенмен, массаның өзгеру заңдылығының қандай да бір нақты моделін таңдау арқылы оның сандық шешімін алуға және жүйенің динамикасын зерттеуге болады [50-58].

Есептеулер жүргізу ыңғайлы болу үшін келесі өлшемсіз айнымалыларды енгіземіз. Мысалы, P_1, P_2 денелер үшін сәйкесінше m_{10}, m_{20} бастапқы массаларды аламыз, арақашықтықты өлшеу бірлігі ретінде a үлкен жарты өсті аламыз. Өлшемсіз m^* масса, a^* арақашықтық, t^* уақыт келесідей болады

$$m_i^* = \frac{m_i}{m_{10}}, \quad a^* = \frac{r}{a_2}, \quad t^* = t_1 = \frac{t}{T_1}, \quad (3.1)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_2}, \quad n_2 = \frac{\sqrt{fm_{20}}}{a_2^{3/2}}, \quad (3.2)$$

Өлшемсіз массалар мен инерция моменттері келесі түрде болады

$$m_1(t) = m_{10} m_1^*(t^*), \quad m_2(t) = m_{10} m_2^*(t^*), \quad (3.3)$$

$$m_1^*(t_0^*) = 1, \quad m_2^*(t_0^*) = \frac{m_{20}}{m_{10}},$$

$$A^*(t^*) = \frac{A_0}{m_{20} a^2}, \quad B^*(t^*) = \frac{B_0}{m_{20} a^2}, \quad C^*(t^*) = \frac{C_0}{m_{20} a^2} \quad (3.4)$$

Делоне-Андруайе элементтер аналогтары да сәйкесінше өлшемсіз шамалармен ауыстырылады

$$L^* = \frac{L}{\sqrt{f(m_{10} + m_{20})a}}, \quad G^* = \frac{G}{\sqrt{f(m_{10} + m_{20})a}}, \quad H^* = \frac{H}{\sqrt{f(m_{10} + m_{20})a}},$$

$$L'^* = \frac{L'}{m_{10} a^2 \omega_0}, \quad G'^* = \frac{G'}{m_{10} a^2 \omega_0}, \quad H'^* = \frac{H'}{m_{10} a^2 \omega_0}, \quad (3.5)$$

және

$$\nu = \frac{m_1^*(t_0^*) + m_2^*(t_0^*)}{m_1^*(t^*) + m_2^*(t^*)}, \quad (3.6)$$

Массалардың өзгеру заңдылығын Эддингтон-Джинс заңымен анықталады [58]

$$m_i^*(t^*) = \left(m_{i0}^{*1-n_i} - \alpha_i (1-n_i) (t^* - t_0^*) \right)^{\frac{1}{1-n_i}}, \quad i = 1, 2, \quad (3.7)$$

мұндағы масса айнымалы болған жағдайда

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 3, \quad \alpha_1 = 10^{-8}, \quad \alpha_2 = 10^{-22}$$

Ал үш өсті дененің өлшемінің өзгерісі радиуспен өлшенетіндіктен, оны сызықты заңдылықпен өзгереді деп аламыз

$$\chi = 1 + \tilde{\beta} t,$$

радиус тұрақты кезінде $\tilde{\beta} = 0$, радиус айнымалы жағдайда $\tilde{\beta} = -\frac{3}{2 \cdot 10^9}$.

Центрлік өрістегі бейстационар үш өсті дененің Делоне-Андруайе элементтер аналогтарындағы ғасырлық ұйытқу теңдеулері келесідей болады

$$\dot{G}_{век} = \frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial g_{век}}, \quad \dot{H}_{век} = \frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial h_{век}}, \quad \dot{g}_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial G_{век}}, \quad \dot{h}_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial H_{век}} \quad (3.8)$$

$$\dot{G}'_{век} = \frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial g'_{век}}, \quad \dot{H}'_{век} = \frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial h'_{век}}, \quad \dot{g}'_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial G'_{век}}, \quad \dot{h}'_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial H'_{век}} \quad (3.9)$$

Сәйкесінше өлшемсіз шамаларға өткенде

$$\dot{G}^*_{век} = \frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial g_{век}}, \quad \dot{H}^*_{век} = \frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial h_{век}}, \quad \dot{g}^*_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial G_{век}}, \quad \dot{h}^*_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}_{век}}{\partial H_{век}} \quad (3.10)$$

$$\dot{G}'^*_{век} = \frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial g'_{век}}, \quad \dot{H}'^*_{век} = \frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial h'_{век}}, \quad \dot{g}'^*_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial G'_{век}}, \quad \dot{h}'^*_{век} = -\frac{\partial \tilde{F}'_{век}}{\partial H'_{век}} \quad (3.11)$$

Барлық «*» таңбалы айнымалылар өлшемсіз және өлшемсіз t^* уақытқа тәуелді. Бұл теңдеулердің ашық түрі ауқымды болғандықтан оларды қосымшаларда көрсеттік.

3.2 Коши есептерінің бастапқы шарттары

Физикалық параметрлердің келесі мәндерін пайдаланамыз [59,60]

$$\begin{aligned} m_{10} = m_1(t_0) &= 1.04M_{\odot}, & m_{20} = m_2(t_0) &= 1.5 \cdot 10^{-5}M_{\odot}, \\ e &= 0,05, & a &= 1.046a.б., \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 1.8 \cdot 10^{-4} (M_{nl}/M_{\odot}), & B_0 &= 1,801 \cdot 10^{-4} (M_{nl}/M_{\odot}) \\ C_0 &= 1,804 \cdot 10^{-4} (M_{nl}/M_{\odot}), & \chi^2(t) &= 1 + \tilde{\beta}t, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Мұндағы $M_{\odot}$ – Күннің массасы, M_{nl} – Kepler 452 b экзопланетасының массасы. Делоне-Андруайе элементтер аналогтарының өлшемсіз бастапқы мәндері келесідей болады [59,60]

$$\begin{aligned} L^* &= 1,022 & G^* &= 1,021, & H^* &= 0,937, \\ l^* &= 0, & g^* &= 1,797, & h^* &= 3,050, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} L'^* &= 0,4147, & G'^* &= 0,414, & H'^* &= 0,380, \\ l'^* &= 0, & g'^* &= \frac{\pi}{3}, & h'^* &= \frac{\pi}{18}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

Тұрақты масса жағдайында

$$m_1(t) = \frac{m_{10}(t)}{\left(m_{10}^{1-n_1} - \alpha_1(1-n_1)t\right)^{\frac{1}{1-n_1}}} = 1.04, \quad (3.36)$$

$$m_2(t) = \frac{m_{20}(t)}{\left(m_{20}^{1-n_2} - \alpha_2(1-n_2)t\right)^{\frac{1}{1-n_2}}} = 0.000015,$$

$$\nu(t) = \frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_1(t) + m_2(t)} = 1, \quad (3.37)$$

$$b = \frac{\ddot{\nu}}{\nu} = 1, \quad (3.38)$$

Изотропты айнымалы масса жағдайында

$$m_1(t) = \frac{m_{10}(t)}{(m_{10}^{1-n_1} - \alpha_1(1-n_1)t)^{\frac{1}{1-n_1}}} = \frac{1}{1 + 1,04 \cdot 10^{-8}t}, \quad (3.39)$$

$$m_2(t) = \frac{m_{20}(t)}{(m_{20}^{1-n_2} - \alpha_2(1-n_2)t)^{\frac{1}{1-n_2}}} = \frac{0.000015}{\sqrt{1 + 4.5 \cdot 10^{-32}t}},$$

$$\nu(t) = \frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_1(t) + m_2(t)} = \frac{1}{1 + 4.5 \cdot 10^{-32}t}, \quad (3.40)$$

3.3 Ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің графиктері, массалары тұрақты және айнымалы жағдайларды салыстыру

Wolfram Mathematica компьютерлік алгебра жүйесін пайдалана отырып, (3.33)-(3.35) бастапқы шарттарда (3.10)-(3.11) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерін алуға болады. Айнымалы өлшемдердің әсерін анықтау және салыстыру үшін есепті масса тұрақты жағдайында да қарастырамыз.

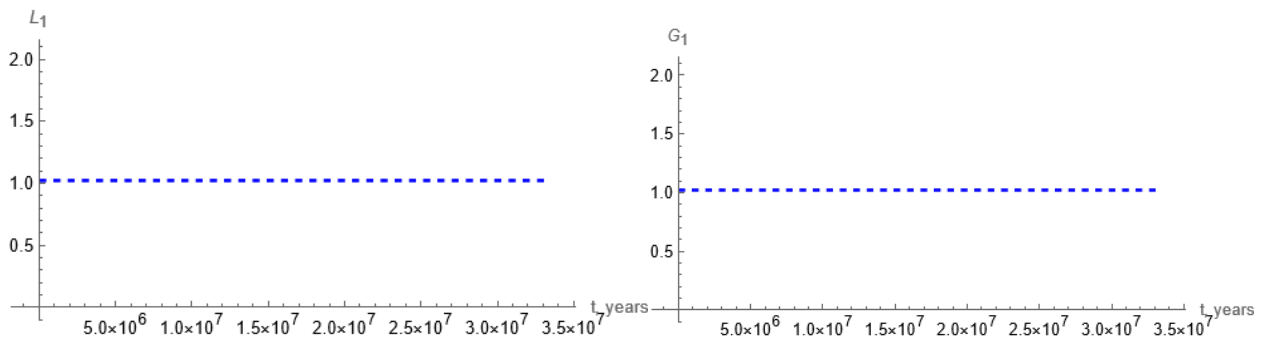
(3.1)-(3.17)-суреттерде Kepler 452 b экзопланетасы центрлік дене өз жұлдызын 31 622 776 рет айналым жасағандағы оның ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын сипаттайтын Делоне-Андруайе элементтер аналогтарының сандық тәсілмен шешілген ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің графиктері көрсетілген.

Есептеулер денелердің массалары мен радиустарына қатысты төрт жағдайда жүргізілді:

1. массасы тұрақты, өлшемі тұрақты жағдай;
2. масса тұрақты, өлшемі айнымалы жағдай;
3. масса айнымалы, өлшемі тұрақты жағдай;
4. масса айнымалы, өлшемі айнымалы жағдай;

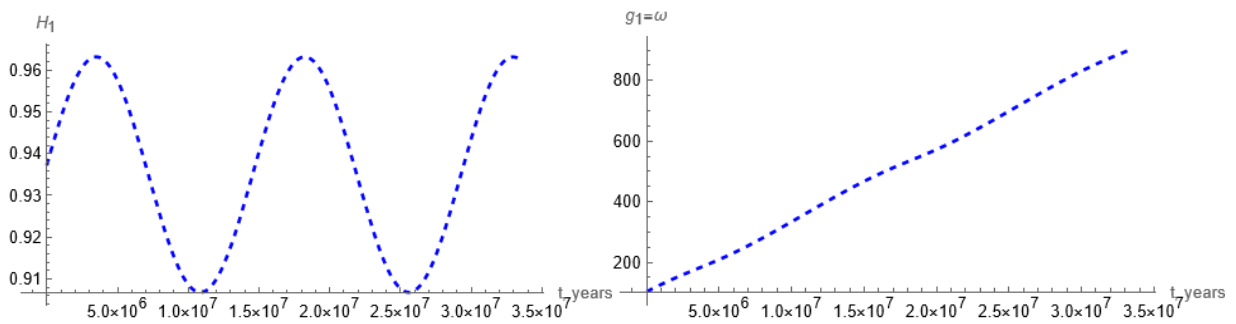
1. 1 жағдайда:

$$m_i(t) = \text{const}, \quad \chi_i(t) = \text{const}$$



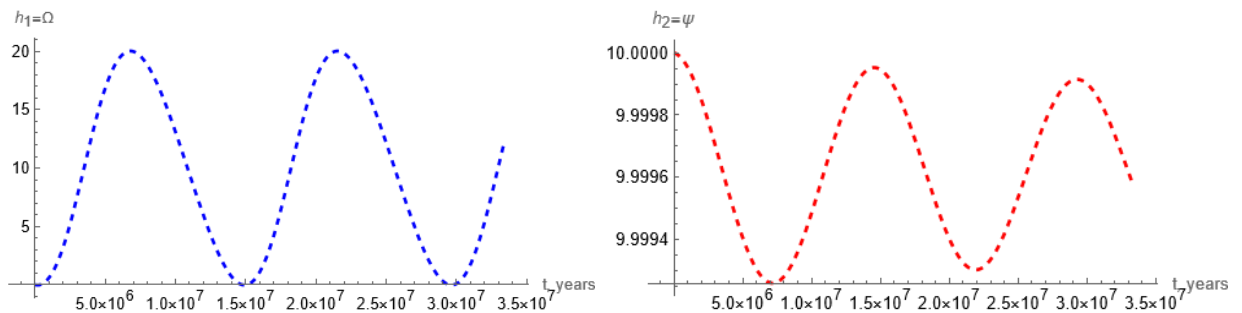
Сурет 3.1 – L_1, G_1 Делоне элементтерінің аналогтарының эволюциясы

Бұл жерде L_1 элементі тұрақты, ол Кеплер элементтерімен байланысында үлкен жарты өске қатысты әсер болғандықтан сәйкесінше үлкен жарты өс те тұрақты болады. G_1 элементі де тұрақты, онда сәйкес оның әсері эксцентритет те тұрақты болады.



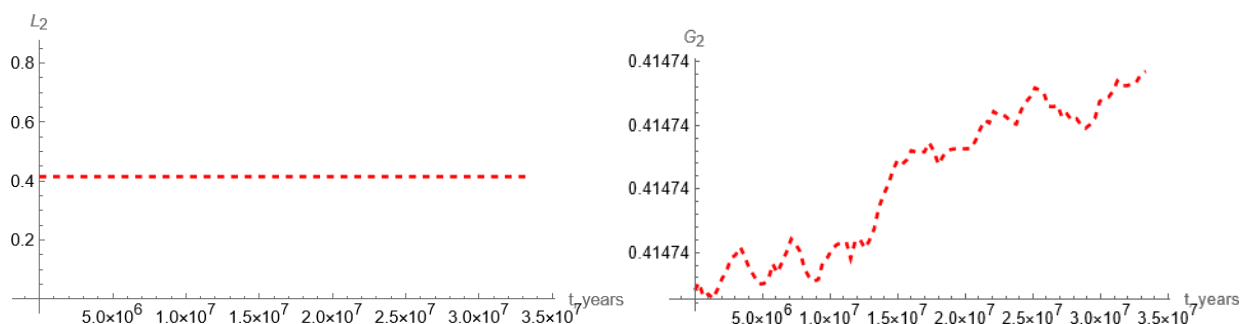
Сурет 3.2 – H_1, g_1 Делоне элементтер аналогтарының эволюциясы

H_1 элементі орбитаның көлбеулігімен байланысты әсер, ол тербелмелі функция, оның диапазоны 0,96 градустан 0,91-қа дейін, демек көлбеулік те тербелмелі функция. g_1 элементі – перицентр аргументі, ол уақыт өткен сайын өсетін функция.



Сурет 3.3 – h_1 Делоне, h_2 Андуайе элементтер аналогтарының эволюциясы

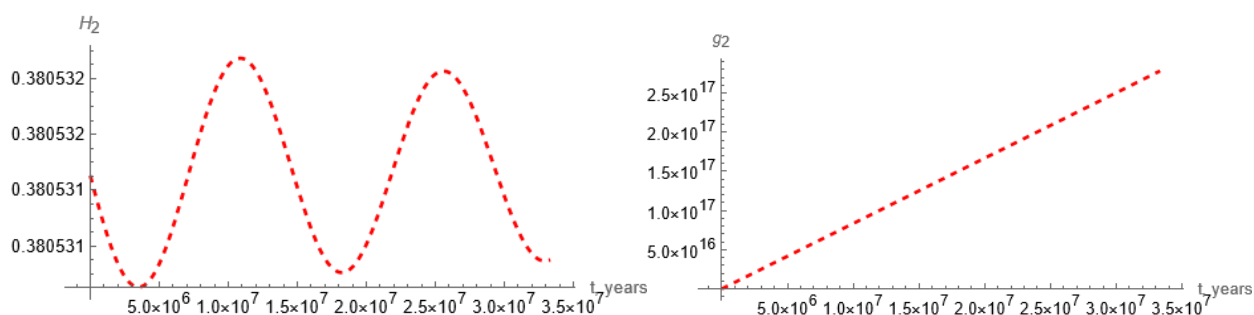
h_1 элементі – жарқырау түйінің бойлығы, ол 0 мен 20 градус арасында өзгертін периодты, тербелмелі функция, периоды шамамен 150 млн жылға тең. h_2 элементі бұрышты сипаттайды, периодты функция, бірақ амплитудасы азайып бара жатыр, уақыт өткен сайын өшуі мүмкін.



Сурет 3.4 – L_2, G_2 Андуайе элементтерінің аналогтарының эволюциясы

L_2 элементі кинетикалық момент векторының қозғалатын өске проекциясы, оның бір шамада тұрақтап, өзгеріссіз болады.

G_2 элементі кинетикалық момент векторының модулінің өзгерісін көрсетеді, оның баяу өзгеруі (үтірден кейін алтыншы цифрында өзгеріс болады), зерттеліп отырған жүйенің теориялық негіздерімен үйлеседі.

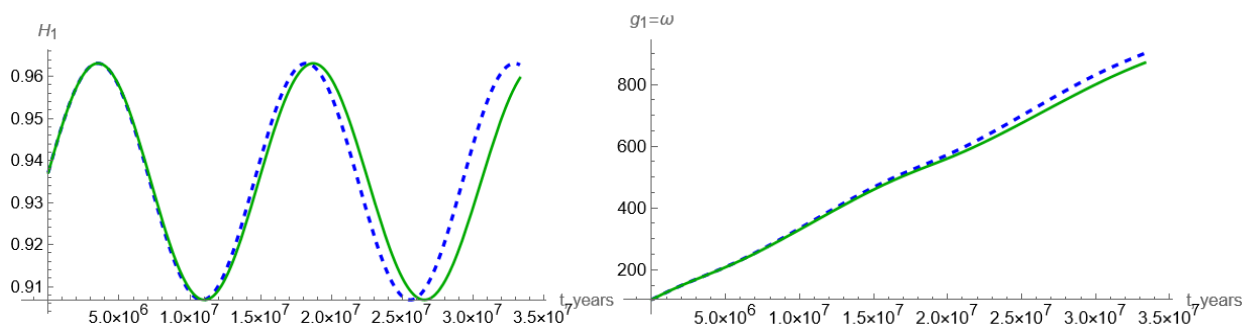


Сурет 3.5 – H_2, g_2 Андуайе элементтерінің аналогтарының эволюциясы

H_2 элементі – кинетикалық момент векторының қозғалмайтын өске проекциясы тербелмелі функция, оның амплитудасы уақыт өткен сайын өте аз мөлшерге азайып бара жатыр, уақыт өте келе ол өшпелі функция болуы мүмкін. g_2 элементі бұрыштық шама, ол уақыт өткен сайын сызықты түрде ұлғаяды. Зерттеулердің барлығы 350 млн жыл үшін есептелді.

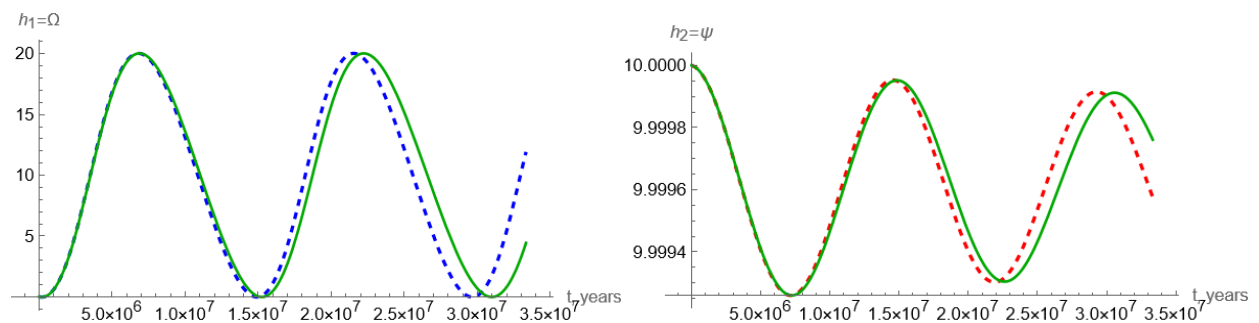
2. Екінші жағдайды $m_i(t) = \text{const}$, $\chi_i(t) \neq \text{const}$, бірінші жағдаймен салыстырайық:

Салыстырмалы графиктен L_1, G_1 Делоне элементтерінің аналогтарының эволюциясын сипаттайтын графиктерді алып тастадық, себебі олар екі жағдайда да тұрақты болады. Алдағы салыстыруларда да оларды көрсетпейміз.



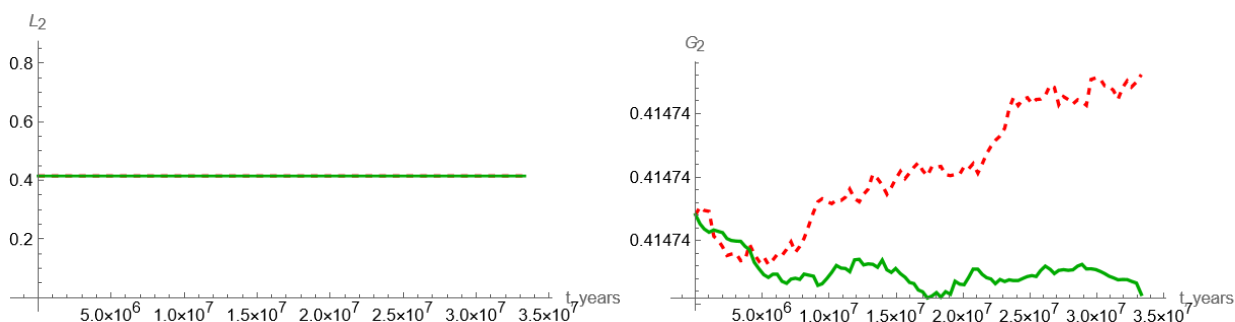
Сурет 3.6 – H_1, g_1 Делоне элементтер аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса тұрақты, өлшемі айнымалы кезінде

H_1 элементі екі жағдайда да тербелістерінің амплитудасы мен жиілігі ұқсастау болғанымен, тұтас сызықта фазалық ығысу байқалады, бұл өлшемнің баяу өзгеруімен байланысты. g_1 элементі – перицентр аргументі, ол екі жағдайда да монотонды түрде артады, яғни жүйеде прецессиялық қозғалыс орын алады. Алайда өлшемнің уақыт бойынша өзгеруі прецессияның жылдамдығына әсер етеді: тұтас сызық үзік сызықтан төмен орналасқан, бұл жағдайда перицентр баяуырақ айналатынын білдіреді. Демек, дененің геометриялық параметрлерінің баяу өзгеруі прецессиялық қозғалысты бәсеңдететін фактор болып табылады. Бұл нәтиже теориялық болжамдармен үйлесімді.



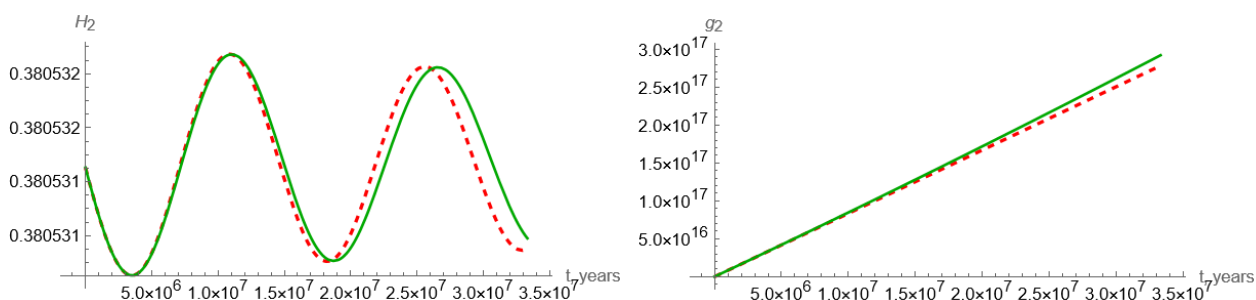
Сурет 3.7 – h_1 Делоне, h_2 Андуайе элементтер аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса тұрақты, өлшемі айнымалы кезінде

h_1 элементі – жарқырау түйінің бойлығы екі жағдайда да тербелмелі функцияны береді, тек өлшемі айнымалы кезінде фазалық ығысу байқалады. h_2 элементі – периодты функция, екінші жағдайда өлшемі өзгеруіне байланысты уақыт өте келе баяуланатыны байқалады.



Сурет 3.8 – L_2, G_2 Андуайе элементтерінің аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса тұрақты, өлшемі айнымалы кезінде

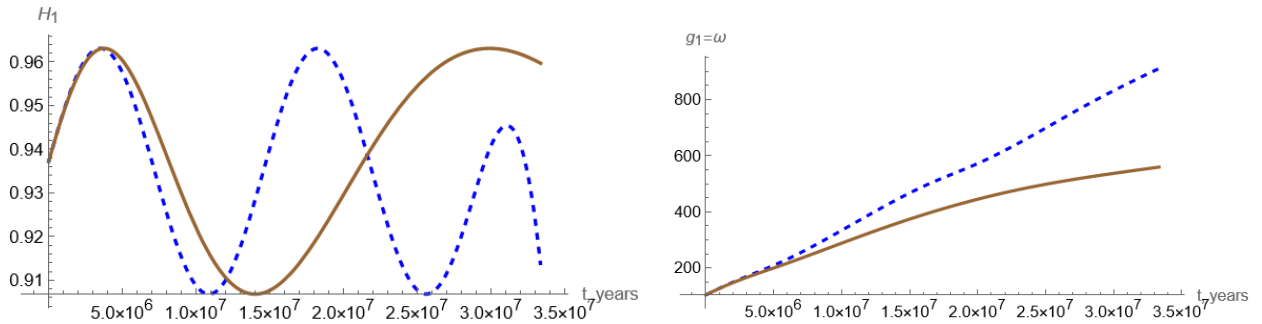
L_2 элементі кинетикалық момент векторының қозғалатын өске проекциясы, екі жағдайда да бір шамада тұрақтап, өзгеріссіз болады. G_2 элементінде, егер дененің массасы тұрақты болып, өлшемі уақытқа тәуелді түрде өзгерсе, онда кинетикалық момент векторының модулі ұзақ мерзімді эволюция барысында салыстырмалы түрде тұрақты күйде сақталады. Керісінше, дененің өлшемі мен массасы тұрақты болған жағдайда кинетикалық момент модулі уақыт өте келе біртіндеп артады.



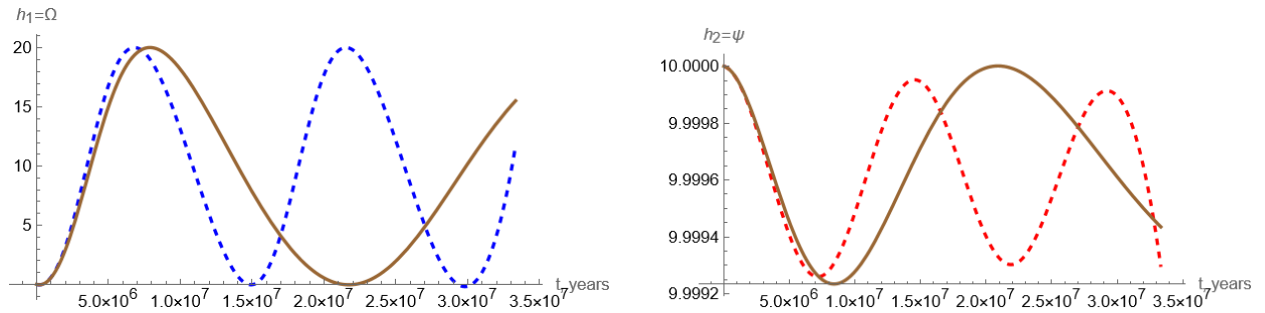
Сурет 3.9 – H_2, g_2 Андуайе элементтерінің аналогтарының эволюциясы үзік сызық – масса, радиус тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса тұрақты, өлшемі айнымалы кезінде

H_2 элементінде екі жағдайда да тербеліс бар, бірақ өлшемі өзгеретін жағдайда (тұтас) амплитуда мен фазада аздаған айырмашылық байқалады, үзік сызық (тұрақты өлшем мен масса) тұтас сызыққа қарағанда фазасы сәл кешігетін сияқты, бұл тербеліс сипатына ішкі құрылым өзгерістерінің әсерін білдіреді. g_2 шамасы уақыт бойынша сызықтық түрде өседі, бұл бұрыштың біртіндеп ұлғайып жатқанын көрсетеді. Өлшемі өзгеретін жағдайда бұл өсу сәл жылдамырақ, яғни, дененің ішкі құрылымындағы (өлшемдік) өзгерістер бұрыштың өсу қарқынына әсер етеді.

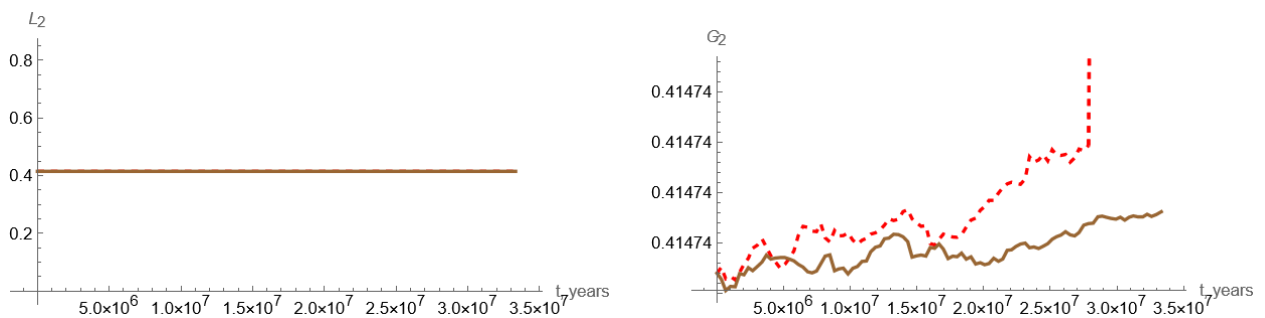
3. Үшінші жағдайды $m_i(t) \neq const$, $\chi_i(t) = const$, бірінші жағдаймен салыстырайық:



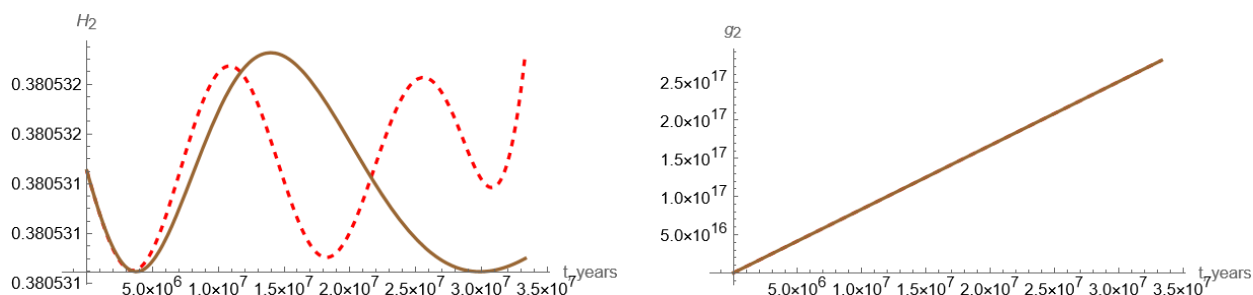
Сурет 3.10 – H_1, g_1 Делоне элементтер аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі тұрақты кезінде



Сурет 3.11 – h_1 Делоне, h_2 Андуайе элементтер аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі тұрақты кезінде



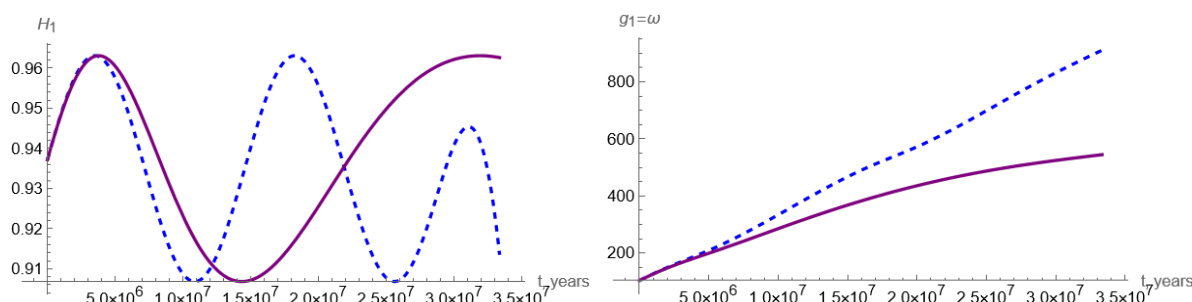
Сурет 3.12 – L_2, G_2 Андуайе элементтерінің аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі тұрақты кезінде



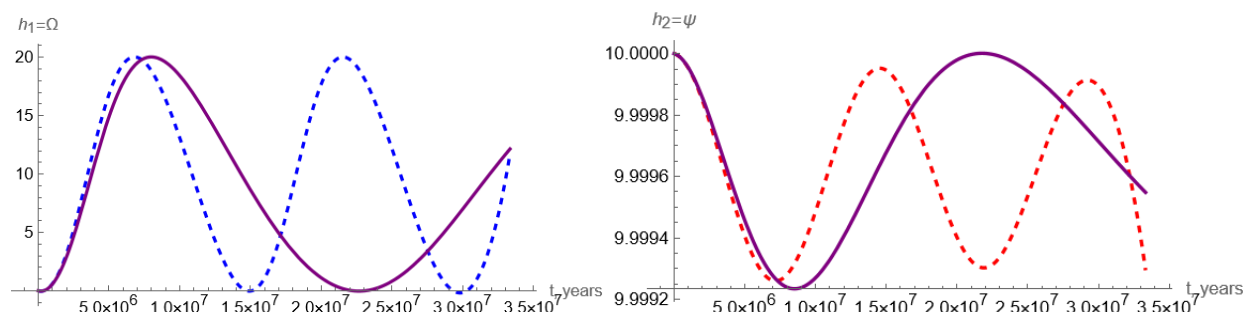
Сурет 3.13 – H_2, g_2 Андуайе элементтерінің аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі тұрақты кезінде

Графиктерден көрініп тұрғандай масса айнымалы, өлшемі тұрақты кезінде L_2 мен g_2 элементтерінде өзгеріс байқалмайды, қалған элементтерде едәуір өзгерістер байқалады.

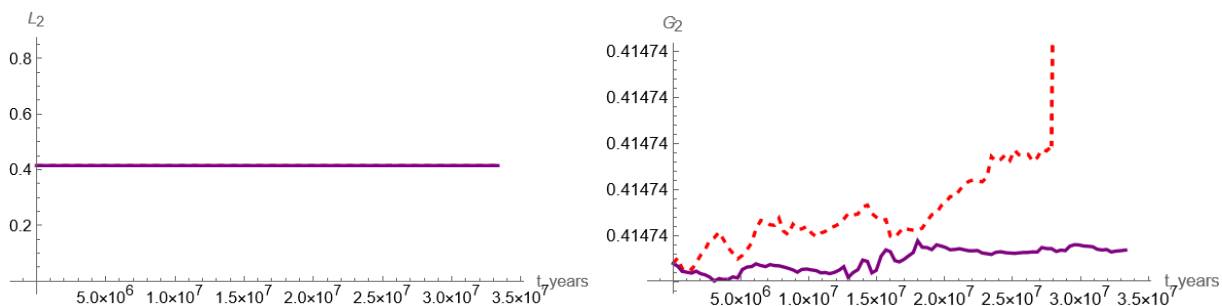
4. Төртінші жағдайды $m_i(t) \neq const$, $\chi_i(t) \neq const$, бірінші жағдаймен салыстырайық:



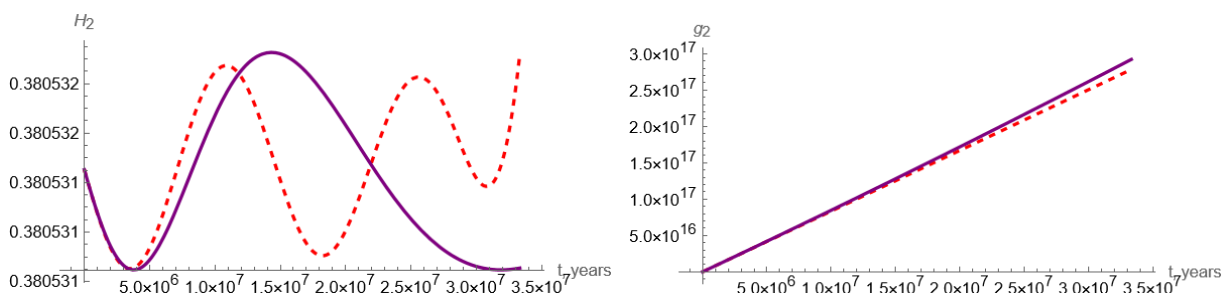
Сурет 3.14 – H_1, g_1 Делоне элементтер аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі айнымалы кезінде



Сурет 3.15 – h_1 Делоне, h_2 Андуайе элементтер аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі айнымалы кезінде



Сурет 3.16 – L_2, G_2 Андуайе элементтерінің аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі айнымалы кезінде



Сурет 3.17 – h_1 Делоне, h_2 Андуайе элементтер аналогтарының эволюциясы, үзік сызық – масса, өлшемі тұрақты кезінде, тұтас сызық – масса айнымалы, өлшемі айнымалы кезінде

Бұл салыстыру графиктерінде масса мен өлшемі айнымалы кезінде L_2 мен g_2 элементтерінде өзгеріс байқалмайды, G_2 кинетикалық момент векторының модулі ұзақ мерзімді эволюция барысында салыстырмалы түрде тұрақты күйде сақталады. Керісінше, дененің өлшемі мен массасы тұрақты болған жағдайда кинетикалық момент модулі уақыт өте келе аз шамаға біртіндеп (үтірден кейін алтыншы цифрда) артады. Қалған элементтердің өзгерісіне қарап, массаның айнымалылығы өлшемнің айнымалылығына қарағанда қатты әсер ететіндігін айтуға болады. Периодты функцияларда қатты фазалық ығысу байқалады, тербелістер төртінші жағдайда анағұрлым баяулайды. Есептеулердің барлығы 350 млн жыл уақыт интервалында жүргізілді.

Қорытынды

Үш өсті бейстационар дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеу барысында Делоне-Андруайе айнымалылар аналогында қозғалыс теңдеулері алынды.

Аналитикалық тәсілмен массасы мен өлшемі айнымалы үш өсті дененің бейстационар центрлік өрістегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын сипаттайтын Делоне-Андруайе айнымалыларында, бірінші ретті, он екі теңдеуден тұратын ғасырлық ұйытқуды сипаттайтын жүйе алынды.

Үш өсті дене Kerler 452 b экзопланетаның центрлік дене жұлдызының өрісіндегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын сипаттайтын Делоне-Андруайе элементтер аналогтарындағы ғасырлық ұйытқу теңдеулері Wolfram Mathematica компьютерлік алгебра жүйесін пайдаланып сандық тәсілмен шешіліп, графиктері алынды. Есептеулер денелердің әр түрлі қарқында изотропты өзгертін айнымалы масса жағдайда және массасы тұрақты жағдайында орындалып, салыстырулар жүргізілді.

ПАЙДАЛАНЫЛҖАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. – 799 с.
- 2 Дубошин Г.Н. О некоторых частных решениях задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // Сообщ. гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1960. – №106. – С. 13-18.
- 3 Дубошин Г.Н. О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения взаимно притягивающихся тел // Астрон. ж. – 1958. – Т. 35, № 2. – С. 265-276.
- 4 Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1975. – 308 с.
- 5 Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. – 416 с.
- 6 Белецкий В.В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусств. спут. Земли. – 1958. – Вып. 1. – С. 25-43.
- 7 Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. матем. и мех. – 1963. – Т.27, № 3. – С. 474-483.
- 8 Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники, сер. Исследование космического пространства. – М.: ВИНТИ, 1978. – Т.11. – 224 с.
- 9 Видякин В.В. Поступательно-вращательное движение двух твердых тел: Учебное пособие. Архангельск: ДКПО “Норд”, 1996. – 184 с.
- 10 Видякин В.В. Поступательно-вращательное движение абсолютно твердых тел. Архангельск: Поморск. пед. ун-т., 1995. – 155 с.
- 11 Видякин В.В. О некоторых подходах к решению проблемы поступательно-вращательного движения твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. АГТУ. – Архангельск, 2001. – Вып. 1. – С. 5-22.
- 12 Видякин В.В. О проблеме поступательно-вращательного движения абсолютно твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. АГТУ. – Архангельск, 2004. – Вып. 3. – С. 49-59.
- 13 Баркин Ю.В., Демин В.Г. Поступательно-вращательное движение небесных тел // Итоги науки и техн. АН СССР. Астрономия. – 1982. Т. 20. – С. 115-134.
- 14 Баркин Ю.В. Вековые эффекты в поступательно-вращательном движении планет, обусловленные их несферичностью // Астрономический Вестник, 1977. – Т. 15, № 2. – С. 105-112.
- 15 Баркин М.Ю. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо // Труды МАИ. – 2014. – Вып. 72.
- 16 Barkin Yu.V. Equations of translational-rotational motion of celestial bodies in osculating elements. // Soviet Astronomy, 1977. – Vol. 21, № 2, – P. 232-237.
- 17 Баркин Ю.В. Динамические системы несферичных небесных тел и теория вращения Луны: Автореф. дис. . . . док. физ.-мат. наук: 01.03.01. – М.: гос. астрон. ин-т. им. П.К. Штернберга, 1989. – 44 с.

- 18 Журавлев С.Г., Петруцкий А.А. Задача о поступательно-вращательном движении трех твердых тел: простейшая классификация и современное состояние проблемы. – М.: Наука, 1989. – 64 с.
- 19 Журавлев С.Г., Петруцкий А.А. Современное состояние проблемы поступательно-вращательного движения трех твердых тел // Астрон. ж. – 1990. – Т. 67, № 3. – С. 602-611.
- 20 Журавлев С.Г. Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. Т2. Поступательно-вращательное движение. – Архангельск: Солти, 2002. – 368 с.
- 21 Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А. Общая теория вращения Земли. – М.: Наука, 1984. – 255 с.
- 22 Ержанов Ж.С., Наурызбаев М.А. Моменты и полюс инерции Земли при ее оледенении // Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем. – 1984. – №3. – С. 28-31.
- 23 Ержанов Ж.С., Наурызбаев М.А. Об эйлеровом вращении Земли переменного состава // Изв. АН КазССР, Сер. Физ.-матем. – 1983. – №3. – С. 25-30.
- 24 Калыбаев А.А. Эволюция поступательно-вращательного движения твердой и упругой Земли. Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук: 01.03.01 – М.: МГУ ГАИШ, 1988. – 39 с.
- 25 Omarov T.B. Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. N-Y.: Nova Science Publ., 2002. – 260 p.
- 26 Омаров Т.Б. Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 143 с.
- 27 Беков А.А. О поверхности Хилла в окрестности вращающегося нестационарного трехосного эллипсоида // Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем. – Алма-Ата: 1990. – №4. – С. 49-52.
- 28 Bekov A.A., Omarov T.B. The theory of orbits in non-stationary stellar systems // Astronomy and Astrophysics Transactions. 2003. – Vol. 22, № 2. – P. 145-153.
- 29 Черепашук А.М. Тесные двойные звезды. Часть II. М.: Физматлит, 2013. – 572 с.
- 30 Eggleton P. Evolutionary processes in binary and multiple stars. New-York: Cambridge University Press, 2006. – 332 p.
- 31 Лукьянов Л.Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. журн. – 2008. – Т. 52, № 8. – С. 680-693.
- 32 Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Изд. «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012. – 229 с.
- 33 Balona L.A., Henrichs H.F. and Le Contel J.M. Pulsation Rotation and mass loss in early type stars. // Sym. Of the I.A.U. – Dordrecht: Kluver, 1994. – № 162. – 394 p.
- 34 Масевич А.Г., Тутуков А.В. Эволюция звезд: теория и наблюдения. – М.: Наука, 1988. – 280 с.

- 35 Бэттен А. Двойные и кратные звезды. – М.: Мир, 1976. – 324 с.
- 36 Кожанов Т.С. Гравитационная динамика иерархических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2003. – 290 с.
- 37 Кокс Дж.П. Теория звездных пульсаций. – М.: Мир, 1983. – 326 с.
- 38 Abad A., Calvo M., Docobo J. A., & Elipe A. On the Orbital Elements of the Two-body Problem with Slowly Decreasing Mass: The Gylden-Mestchersky Cases // The Astronomical Journal. 2020. – Vol. 160. – Issue 5. – 12 p. doi: [10.3847/1538-3881/abb4e4](https://doi.org/10.3847/1538-3881/abb4e4)
- 39 Минглибаев М.Дж., Бижанова С.Б. Өстік симметриялы бейстационар екі дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері // Вестник КБТУ. Серия «Физико-математические и технические науки». – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 143-149.
- 40 Минглибаев М.Дж., Бижанова С.Б. Массасы мен өлшемі айнымалы өстік симметриялы дененің эволюциялық теңдеулерін зерттеу // Вестник КазНПУ им Абая. Серия «Физико-математические науки». – 2020. – Т. 69, №1. – С. 251-257.
- 41 Minglibayev M.Zh., Ahmetrassulova A.A. Secular perturbations in the problem of translational rotational motion two axisymmetric non-stationary gravitating bodies with variable oblate. In: Classical and Celestial Mechanics. Selected Papers, L. Gdomski, P. Krasilnikov, A. Prokopenya (Eds.). Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2012. – P. 116-126.
- 42 Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 576 с.
- 43 Беков А.А., Омаров Т.Б. Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и некоторые нестационарные задачи небесной механики //Астрон. журн. – 1978. – Т. 55, № 3. – С. 635-644.
- 44 Беков А.А. Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и динамические системы, приводимые к канонической форме // ПММ. – 1986. – Т. 50, № 5. – С. 717-726.
- 45 Минглибаев М.Дж. К канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы //Труды АФИ АН КазССР. – Алматы: Ғылым, 1992. – Т. 50. – С. 71-78.
- 46 Prokopenya A.A., Minglibayev M.Zh., Bizhanova S.B. Investigation of the Evolution Equations of the Two-Body Problem with Variable Masses // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – 2020. – Vol. IX. – P. 204-219.
- 47 Minglibayev M.Zh., Bizhanova S.B. Translational-rotational motion of a nonstationary axisymmetric body // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2021. – Vol. 336, № 2. – P. 131-137.
- 48 Minglibayev M., Prokopenya A., Bizhanova S. Analysis of Evolution Equations of a Nonstationary Axisymmetric Body in a Nonstationary Central Gravitational Field // 8th International Congress of Serbian Society of Mechanics Kragujevac, Serbia, June 28-30, 2021. – P. 638-647.
- 49 Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М. Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами //

Программирование. – 2014. – Т. 40, № 2. – С. 51-59.

50 Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Шомшекова С.А. Применение компьютерной алгебры в исследованиях двухпланетной задачи трех тел с переменными массами // Программирование. – 2019. Т. 45, № 2. – С. 58-65.

51 Prokopenya, A.N., Minglibayev, M.Zh., Shomsheкова, S.A. Application of computer algebra in the study of the two-planet problem of three bodies with variable masses // Programming and Computer Software. – 2019. – Vol. 45, № 2, – P. 73-80.

52 Прокопеня А.Н. Решение физических задач с использованием системы Mathematica. Брест: Изд. БГТУ, 2005. – 260 с.

53 Wolfram S. An Elementary Introduction to the Wolfram Language. Champaign, IL: Wolfram Media, 2015. – 324 p.

54 Wolfram S. The Mathematica book. 4th ed. - Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.

55 Воробьев Е.М. Введение в систему «Математика»: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 262 с.

56 Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. – Минск: БГУ, 1999. – 265 с.

57 Prokopenya A., Minglibayev M., Baisbayeva O.: Analytical computations in studying translational-rotational motion of a non-stationary triaxial body in the central gravitational field // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2020. Vol. 12291, – P. 478-491.

58 Jeans J.H. The effect of varying mass on a binary system // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1925. – Vol. 85. – P. 912-914.

59 Аллен К.У. Астрофизические величины // М.: Мир, 1977. – 279 с.

60 Сурдин В.Г. Солнечная система // *Астрономия и Астрофизика*. Москва, Физматлит, 2017. – 460 с.

ҚОСЫМША

ҒАСЫРЛЫҚ ҰЙЫТҚУ ТЕҢДЕУЛЕРІ

`eqh1 = h1'[t] == (D[Htrans, H1] /. rulx /. rulT // Simplify)`
|дифференцировать |упростить

$$\begin{aligned}
 h1'[t] = & \frac{1}{16 G1^5 L1^3 \gamma[t]^4}^3 (A0 + B0 - 2 C0) \left(-\frac{1}{G1 G2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}}} 4 \cos[h1[t]] H1[t]^2 \right. \\
 & \left(\sin[g2[t]] (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]]) \right. \\
 & \left. \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 + \left(-\cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. L2 \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \times G2[t] + L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] \right) \right. \\
 & \left. \left(H2[t] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \right) + \frac{1}{G2[t]^3} 4 G1 \cos[h1[t]] \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \\
 & \left(\sin[g2[t]] \cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]] \right) \\
 & \left. \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 + \left(-\cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. L2 \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \times G2[t] + L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] \right) \right) \\
 & \left(H2[t] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) - \frac{1}{G1 G2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}}} \\
 & 4 H1[t]^2 \sin[h1[t]] \left(\left(H2[t] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \right. \\
 & \left. \left(-\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] G2[t]^2 + L2 \cos[h2[t]] \times \sin[g2[t]] \times G2[t] + \right. \right. \\
 & \left. \left. L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] \right) - G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\cos[g_2[t]] \times \cos[h_2[t]] \times G_2[t] - H_2[t] \times \sin[g_2[t]] \times \sin[h_2[t]] \right) \Bigg) + \frac{1}{G_2[t]^3} \\
& 4 G_1 \sqrt{1 - \frac{H_1[t]^2}{G_1^2}} \sin[h_1[t]] \left(\left(H_2[t] \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_2[t]^2}} + L \cos[g_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \right) \right. \\
& \left(- \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]] G_2[t]^2 + L \cos[h_2[t]] \times \sin[g_2[t]] \times G_2[t] + \right. \\
& \left. L \cos[g_2[t]] \times H_2[t] \times \sin[h_2[t]] \right) - G_2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[g_2[t]] \\
& \left. \left(\cos[g_2[t]] \times \cos[h_2[t]] \times G_2[t] - H_2[t] \times \sin[g_2[t]] \times \sin[h_2[t]] \right) \right) + \\
& \frac{1}{G_2[t]^4} 4 H_1[t] \times \sin[2 h_1[t]] \left(\left(- \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]] G_2[t]^2 + \right. \right. \\
& \left. L \cos[h_2[t]] \times \sin[g_2[t]] \times G_2[t] + L \cos[g_2[t]] \times H_2[t] \times \sin[h_2[t]] \right) \\
& \left(- \cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} G_2[t]^2 - L \sin[g_2[t]] \times \sin[h_2[t]] \times G_2[t] + \right. \\
& \left. L \cos[g_2[t]] \times \cos[h_2[t]] \times H_2[t] \right) - \\
& G_2[t]^2 (\cos[h_2[t]] \times H_2[t] \times \sin[g_2[t]] + \cos[g_2[t]] \times G_2[t] \times \sin[h_2[t]]) \\
& \left. \left(\cos[g_2[t]] \times \cos[h_2[t]] \times G_2[t] - H_2[t] \times \sin[g_2[t]] \times \sin[h_2[t]] \right) \right) + \\
& \frac{1}{G_2[t]^4} 2 \cos[2 h_1[t]] \times H_1[t] \\
& \left(G_2[t]^2 (\cos[h_2[t]] \times H_2[t] \times \sin[g_2[t]] + \cos[g_2[t]] \times G_2[t] \times \sin[h_2[t]])^2 + \right. \\
& \left(\cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} G_2[t]^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. L \sin[g_2[t]] \times \sin[h_2[t]] \times G_2[t] - L \cos[g_2[t]] \times \cos[h_2[t]] \times H_2[t] \right)^2 - \\
& G_2[t]^2 (\cos[g_2[t]] \times \cos[h_2[t]] \times G_2[t] - H_2[t] \times \sin[g_2[t]] \times \sin[h_2[t]])^2 - \\
& \left(- \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]] G_2[t]^2 + \right. \\
& \left. L \cos[h_2[t]] \times \sin[g_2[t]] \times G_2[t] + L \cos[g_2[t]] \times H_2[t] \times \sin[h_2[t]] \right)^2 \Bigg) + \\
& \frac{1}{G_2[t]^4} H_1[t] \left((3 \cos[2 g_2[t]] + 1) G_2[t]^4 - 6 \cos[g_2[t]] \right. \\
& \left(\cos[g_2[t]] L^2 + 2 H_2[t] \sqrt{1 - \frac{L^2}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} L + \cos[g_2[t]] H_2[t]^2 \right) \\
& \left. G_2[t]^2 + 3 L^2 (\cos[2 g_2[t]] + 3) H_2[t]^2 \right) \Bigg) \chi[t]^2
\end{aligned}$$

eqH1 = H1'[t] == -(D[Htrans, h1] /. rulx /. rulT // Simplify)
[дифференцировать] [упростить]

$$\begin{aligned}
 H1'[t] = & \frac{1}{8 G1^5 L1^3 G2[t]^4 \chi[t]^4} \\
 & 3 (A0 + B0 - 2 C0) \left(2 G1 G2[t] \times H1[t] \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \sin[h1[t]] \left(G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right. \right. \\
 & \quad \sin[g2[t]] (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]]) + \\
 & \quad \left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \left(L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] - \right. \\
 & \quad \left. \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right) \right) - \\
 & 2 G1 \cos[h1[t]] \times G2[t] \times H1[t] \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \left(\left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \right. \\
 & \quad \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \\
 & \quad \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) - G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \right. \\
 & \quad \left. (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]]) \right) + 2 \cos[2 h1[t]] \\
 & (G1^2 - H1[t]^2) \left(\left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) \left(L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right) - \right. \\
 & \quad \left. G2[t]^2 (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]]) \right. \\
 & \quad \left. (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]]) \right) - (G1^2 - H1[t]^2) \\
 & \sin[2 h1[t]] \left(G2[t]^2 (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]])^2 - \right. \\
 & \quad \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \\
 & \quad \left. \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right)^2 + \left(-L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] + \right. \\
 & \quad \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} + L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right)^2 - \\
 & \quad \left. G2[t]^2 (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]])^2 \right) \chi[t]^2
 \end{aligned}$$


```
eqg1 = g1'[t] == (D[Htrans, G1] /. rulκ /. rulT // Simplify)
               |дифференцировать                |упростить
```

$$\begin{aligned}
g1'[t] = & \frac{1}{16 G1^6 L1^3 G2[t]^4 \gamma[t]^4}^5 (A0 + B0 - 2 C0) \left(8 G1^2 G2[t]^4 - \right. \\
& \frac{3}{2} H1[t]^2 \left((1 + 3 \cos[2 g2[t]]) G2[t]^4 + 3 L2^2 (3 + \cos[2 g2[t]]) H2[t]^2 - 6 \cos[g2[t]] G2[t]^2 \right. \\
& \left. \left(L2^2 \cos[g2[t]] + \cos[g2[t]] H2[t]^2 + 2 L2 \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \right) - \\
& \frac{3}{2} G1^2 \left(-((-5 + \cos[2 g2[t]]) G2[t]^4) - L2^2 (3 + \cos[2 g2[t]]) H2[t]^2 + 2 \cos[g2[t]] \right. \\
& \left. G2[t]^2 \left(L2^2 \cos[g2[t]] + \cos[g2[t]] H2[t]^2 + 2 L2 \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \right) - \\
& 12 G1 \cos[h1[t]] \times G2[t] \times H1[t] \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \left(G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \right. \\
& \left. (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]]) + \right. \\
& \left. \left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \left(L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] - \right. \right. \\
& \left. \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right) \right) - \\
& 12 G1 G2[t] \times H1[t] \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \sin[h1[t]] \\
& \left(\left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \right. \\
& \left. \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) - G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \\
& \left(\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right) \Bigg) + 6 (G1^2 - H1[t]^2) \\
& \sin[2 h1[t]] \left(\left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) \left(L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] - \right. \right. \\
& \left. \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right) - \right. \\
& \left. G2[t]^2 (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]]) \right. \\
& \left. (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]]) \right) \Bigg) + 3 \cos[2 h1[t]] \\
& (G1^2 - H1[t]^2) \left(G2[t]^2 (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]])^2 - \right. \\
& \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} \right. \\
& \left. G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right)^2 + \left(-L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] + \right. \\
& \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} + L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right)^2 - \\
& \left. G2[t]^2 (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]])^2 \right) \Bigg) \\
& \chi[t]^2 - \frac{1}{8 G1^7 L1^3 G2[t]^4 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \gamma[t]^4} \\
& (A0 + B0 - 2 C0) \\
& \left(8 G1^3 G2[t]^4 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(8 G1^3 G2[t]^4 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} - \right. \\
& 3 \left(2 G1^3 G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right)^2 + \right. \\
& 2 G1^3 G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} (G2[t]^2 - H2[t]^2) \sin[g2[t]]^2 + \\
& 2 G1^2 \cos[h1[t]] G2[t]^3 H1[t] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \\
& (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]]) + G1^3 G2[t]^2 \\
& \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]])^2 - \\
& G1^3 \cos[2 h1[t]] G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \\
& (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]])^2 + \\
& 2 G1^2 G2[t] \times H1[t] \left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \sin[h1[t]] \\
& \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) + \\
& G1^3 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right)^2 + \\
& G1^3 \cos[2 h1[t]] \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right)^2 + \\
& 2 G1^2 \cos[h1[t]] \times G2[t] \times H1[t] \left(\sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} H2[t] + L2 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \right) \\
& \left(L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] - \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \right. \\
& \left. L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right) - 2 G1^3 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \sin[2 h1[t]] \\
& \left(L2 \cos[h2[t]] \times G2[t] \times \sin[g2[t]] + L2 \cos[g2[t]] \times H2[t] \times \sin[h2[t]] - \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) \left(L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] - \right. \\
& \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right) + \\
& G1^3 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \left(-L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] + \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} \right. \\
& \left. G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} + L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right)^2 - \\
& G1^3 \cos[2 h1[t]] \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \left(-L2 \cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times H2[t] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{L2^2}{G2[t]^2}} G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} + L2 G2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]] \right)^2 - \\
& 2 G1^2 G2[t]^3 H1[t] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \times \sin[h1[t]] (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - \\
& H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]]) + 2 G1^3 G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} \sin[2 h1[t]] \\
& (\cos[h2[t]] \times H2[t] \times \sin[g2[t]] + \cos[g2[t]] \times G2[t] \times \sin[h2[t]]) \\
& (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]]) + G1^3 G2[t]^2 \\
& \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]])^2 + \\
& G1^3 \cos[2 h1[t]] G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H1[t]^2}{G1^2}} (\cos[g2[t]] \times \cos[h2[t]] \times G2[t] - \\
& H2[t] \times \sin[g2[t]] \times \sin[h2[t]])^2 \Big) \chi[t]^2 - 3 G1 L1^2 \gamma[t] \gamma''[t]
\end{aligned}$$

$$\text{eqh2} = \text{h2}'[t] = (\text{D}[\text{Hrot} /. \text{rulx}, \text{H2}] /. \text{rulT})$$

$$\text{h2}'[t] =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{1+4.5 \times 10^{-32} t} (1+1.04 \times 10^{-8} t)} 1.52999 \times 10^{-12} \left(\frac{0.000015}{\sqrt{1+4.5 \times 10^{-32} t}} + \frac{1.04}{1+1.04 \times 10^{-8} t} \right)^3 \\ & \left(1 - \frac{3 t}{200000000} \right)^2 \left(4.08585 \cos[h1[t]] H1[t] \sqrt{1-0.958419 H1[t]^2} \right. \\ & \left(\left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]]}{G2[t]^2} + \frac{\cos[h2[t]] \sqrt{1-\frac{0.172009}{G2[t]^2} H2[t]}}{G2[t]^2 \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \left(\frac{\sqrt{1-\frac{0.172009}{G2[t]^2} H2[t]}}{G2[t]} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{G2[t]} \right) + \frac{\cos[h2[t]] \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]]^2}{G2[t]} - \right. \\ & \left. \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right)}{G2[t]^2 \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{1-\frac{0.172009}{G2[t]^2}}}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t]}{G2[t]^3 \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \\ & \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \cos[h2[t]] \sqrt{1-\frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \right. \\ & \left. \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + 2 (1.04339 - H1[t]^2) \sin[2 h1[t]] \\ & \left(-\frac{\sin[g2[t]] \sin[h2[t]] \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right)}{G2[t]} + \right. \\ & \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]]}{G2[t]^2} + \frac{\cos[h2[t]] \sqrt{1-\frac{0.172009}{G2[t]^2} H2[t]}}{G2[t]^2 \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \\ & \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \right. \\ & \left. \sqrt{1-\frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) + \\ & \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} - \frac{\sqrt{1-\frac{0.172009}{G2[t]^2} H2[t] \sin[h2[t]]}}{G2[t]^2 \sqrt{1-\frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \Bigg) + \\
& \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \right. \\
& \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + \\
& \frac{\cos[h2[t]] \sin[g2[t]] \left(\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] - \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right)}{G2[t]} \Bigg) - \\
& 4.08585 H1[t] \sqrt{1 - 0.958419 H1[t]^2} \sin[h1[t]] \left(-\frac{\sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]]^2 \sin[h2[t]]}{G2[t]} + \right. \\
& \left. \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]}{G2[t]} + \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{G2[t]} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) + \\
& \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}}}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t]}{G2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \right. \\
& \left. \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) - \\
& \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \left(\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] - \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right)}{G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} + \\
& \cos[2 h1[t]] (1.04339 - H1[t]^2) \\
& \left(-\frac{2 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]] \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right)}{G2[t]} + \right. \\
& 2 \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \\
& \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) - \\
 & 2 \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]]}{G2[t]^2} + \frac{\cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]}{G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \\
 & \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \right. \\
 & \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) - \\
 & \frac{2 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]] \left(\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] - \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right)}{G2[t]} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 1.04339 \left(4 \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}}}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t]}{G2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]}{G2[t]} + \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{G2[t]} \right) - \frac{4 H2[t] \sin[g2[t]]^2}{G2[t]^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]] \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right)}{G2[t]} + \\
 & 2 \left(- \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \\
 & \left(- \frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \right. \\
 & \left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) + \\
 & 2 \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]]}{G2[t]^2} + \frac{\cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]}{G2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} \right) \\
 & \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \right. \\
 & \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]] \left(\cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] - \frac{H_2[t] \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right)}{G_2[t]} \Bigg) + \\
& H_1[t]^2 \left(-4 \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}}}{G_2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] H_2[t]}{G_2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} \right) \right. \\
& \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]}{G_2[t]} + \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}}{G_2[t]} \right) + \frac{4 H_2[t] \sin[g_2[t]]^2}{G_2[t]^2} + \\
& \frac{2 \cos[h_2[t]] \sin[g_2[t]] \left(\frac{\cos[h_2[t]] H_2[t] \sin[g_2[t]]}{G_2[t]} + \cos[g_2[t]] \sin[h_2[t]] \right)}{G_2[t]} + \\
& 2 \left(-\frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} \right) \\
& \left(-\frac{0.41474 \cos[h_2[t]] \sin[g_2[t]]}{G_2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] H_2[t] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^2} + \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]] \right) + \\
& 2 \left(\frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]]}{G_2[t]^2} + \frac{\cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]}{G_2[t]^2 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} \right) \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] H_2[t]}{G_2[t]^2} - \right. \\
& \left. \cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right) - \\
& \left. \frac{2 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]] \left(\cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] - \frac{H_2[t] \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right)}{G_2[t]} \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

eqg2 = g2'[t] == (D[Hrot /. rulx, G2] /. rul1)

g2'[t] ==

$$\begin{aligned}
& \frac{3.70268 \times 10^8 \sqrt{1 + 4.5 \times 10^{-32} t} G_2[t]}{\left(1 - \frac{3t}{200000000}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + 4.5 \times 10^{-32} t} (1 + 1.04 \times 10^{-8} t)} 1.52999 \times 10^{-12} \\
& \left(\frac{0.000015}{\sqrt{1 + 4.5 \times 10^{-32} t}} + \frac{1.04}{1 + 1.04 \times 10^{-8} t} \right)^3 \left(1 - \frac{3t}{200000000}\right)^2 \left(4.08585 \cos[h_1[t]] \right. \\
& \left. H_1[t] \sqrt{1 - 0.958419 H_1[t]^2} \left(-\frac{\cos[h_2[t]] H_2[t] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[g_2[t]]^2}{G_2[t]^2} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{H2[t]^2 \sin[g2[t]] \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right)}{G2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} + \\
& \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]}{G2[t]} + \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{G2[t]} \right) \\
& \left(- \frac{0.829479 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^3} - \frac{\cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]^2}{G2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} - \right. \\
& \left. \frac{0.172009 \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} G2[t]^3} + \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} \right) + \\
& \left(\frac{0.172009 H2[t]}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} G2[t]^4} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]}{G2[t]^2} + \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t]^2}{G2[t]^4 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} - \right. \\
& \left. \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{G2[t]^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \right. \\
& \left. \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + 2 (1.04339 - H1[t]^2) \sin[2 h1[t]] \\
& \left(\frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]] \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right)}{G2[t]^2} + \right. \\
& \left(- \frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) \\
& \left(- \frac{0.829479 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^3} - \frac{\cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]^2}{G2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}} - \right. \\
& \left. \frac{0.172009 \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} G2[t]^3} + \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{0.41474 \cos[h_2[t]] \sin[g_2[t]]}{G_2[t]^2} + \frac{0.829479 \cos[g_2[t]] H_2[t] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^3} + \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]^2 \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} + \frac{0.172009 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]]}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} G_2[t]^3} \right) \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] H_2[t]}{G_2[t]^2} - \cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} - \right. \\
& \left. \frac{0.41474 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right) - \\
& \frac{\cos[h_2[t]] H_2[t] \sin[g_2[t]] \left(\cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] - \frac{H_2[t] \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right)}{G_2[t]^2} \Bigg) -
\end{aligned}$$

$$4.08585 H_1[t] \sqrt{1 - 0.958419 H_1[t]^2} \sin[h_1[t]]$$

$$\left(\frac{H_2[t] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[g_2[t]]^2 \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{0.172009 H_2[t]}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} G_2[t]^4} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]}{G_2[t]^2} + \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] H_2[t]^2}{G_2[t]^4 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} - \right. \\
& \left. \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}}{G_2[t]^2} \right) \left(- \frac{0.41474 \cos[h_2[t]] \sin[g_2[t]]}{G_2[t]} - \right. \\
& \left. \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] H_2[t] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^2} + \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]] \right) \\
& \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]}{G_2[t]} + \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}}{G_2[t]} \right) \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[h_2[t]] \sin[g_2[t]]}{G_2[t]^2} + \frac{0.829479 \cos[g_2[t]] H_2[t] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^3} + \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]^2 \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} + \frac{0.172009 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]]}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} G_2[t]^3} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{0.172009 \cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} G_2[t]^3} + \frac{0.41474 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^2} \right) \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] H_2[t]}{G_2[t]^2} - \cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right) + \\
& \frac{2 H_2[t] \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]] \left(\cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] - \frac{H_2[t] \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right)}{G_2[t]^2} \Bigg) + \\
& 1.04339 \left(4 \left(\frac{0.172009 H_2[t]}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} G_2[t]^4} - \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]}{G_2[t]^2} + \right. \right. \\
& \left. \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] H_2[t]^2}{G_2[t]^4 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} - \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}}{G_2[t]^2} \right) \\
& \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]}{G_2[t]} + \frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}}{G_2[t]} \right) + \frac{4 H_2[t]^2 \sin[g_2[t]]^2}{G_2[t]^3} - \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[h_2[t]] \sin[g_2[t]]}{G_2[t]^2} + \frac{0.829479 \cos[g_2[t]] H_2[t] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^3} + \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]^2 \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} + \frac{0.172009 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} \sin[h_2[t]]}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} G_2[t]^3} \right) + \\
& 2 \left(- \frac{0.829479 \cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] H_2[t]}{G_2[t]^3} - \frac{\cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} H_2[t]^2}{G_2[t]^3 \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}} - \right. \\
& \left. \frac{0.172009 \cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}}}{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} G_2[t]^3} + \frac{0.41474 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]^2} \right) \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] H_2[t]}{G_2[t]^2} - \cos[h_2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G_2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H_2[t]^2}{G_2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right) + \\
& \frac{2 H_2[t] \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]] \left(\cos[g_2[t]] \cos[h_2[t]] - \frac{H_2[t] \sin[g_2[t]] \sin[h_2[t]]}{G_2[t]} \right)}{G_2[t]^2} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\text{eqH2} = \text{H2}'[\mathbf{t}] == -(\text{D}[\text{Hrot} /. \text{rulx}, \mathbf{h2}] /. \text{rulT})$$

$$\text{H2}'[\mathbf{t}] ==$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4.5 \times 10^{-32} \mathbf{t}} (1 + 1.04 \times 10^{-8} \mathbf{t})} 1.52999 \times 10^{-12} \left(\frac{0.000015}{\sqrt{1 + 4.5 \times 10^{-32} \mathbf{t}}} + \frac{1.04}{1 + 1.04 \times 10^{-8} \mathbf{t}} \right)^3$$

$$\left(1 - \frac{3 \mathbf{t}}{200000000} \right)^2 \left(-4.08585 \text{H1}[\mathbf{t}] \sqrt{1 - 0.958419 \text{H1}[\mathbf{t}]^2} \text{Sin}[\mathbf{h1}[\mathbf{t}]] \right.$$

$$\left(\sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \text{Sin}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \left(-\frac{\text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \text{H2}[\mathbf{t}] \text{Sin}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]]}{\text{G2}[\mathbf{t}]} - \text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{Sin}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \right) + \right.$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \text{H2}[\mathbf{t}]}{\text{G2}[\mathbf{t}]} + \frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}}}{\text{G2}[\mathbf{t}]} \right)$$

$$\left(-\frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \text{H2}[\mathbf{t}]}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2} + \text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} + \right.$$

$$\left. \right)$$

$$\sqrt{1 - 0.958419 \text{H1}[\mathbf{t}]^2} \left(\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \text{H2}[\mathbf{t}]}{\text{G2}[\mathbf{t}]} + \frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}}}{\text{G2}[\mathbf{t}]} \right) \right.$$

$$\left(-\frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \text{Sin}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]]}{\text{G2}[\mathbf{t}]} - \frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{H2}[\mathbf{t}] \text{Sin}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]]}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2} + \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \text{Sin}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \right) +$$

$$\sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \text{Sin}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \left(\text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}] \text{Sin}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{Sin}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]]}{\text{G2}[\mathbf{t}]} \right) +$$

$$\text{Cos}[2 \mathbf{h1}[\mathbf{t}]] (1.04339 - \text{H1}[\mathbf{t}]^2)$$

$$\left(-2 \left(-\frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \text{Sin}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]]}{\text{G2}[\mathbf{t}]} - \frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{H2}[\mathbf{t}] \text{Sin}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]]}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2} + \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \text{Sin}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \right) \left(\frac{0.41474 \text{Cos}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \text{H2}[\mathbf{t}]}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2} - \right.$$

$$\left. \text{Cos}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} \sqrt{1 - \frac{\text{H2}[\mathbf{t}]^2}{\text{G2}[\mathbf{t}]^2}} - \frac{0.41474 \text{Sin}[\mathbf{g2}[\mathbf{t}]] \text{Sin}[\mathbf{h2}[\mathbf{t}]]}{\text{G2}[\mathbf{t}]} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& H1[t]^2 \left(2 \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \right. \\
& \quad \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + \\
& \quad 2 \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} + \right. \\
& \quad \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} + \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + \\
& \quad 2 \left(-\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) \\
& \quad \left(\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] - \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + \\
& \quad 2 \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin[2 h1[t]] \left(\left(-\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) \right. \\
& \quad \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) + \\
& \quad \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right)^2 + \\
& \quad \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \right. \\
& \quad \left. \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} + \right. \\
& \quad \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} + \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + \\
& \quad \left(\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] - \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\text{eqG2} = \text{G2}'[t] == -(D[\text{Hrot} /. \text{rulx}, \text{g2}] /. \text{rulT})$$

$$\text{G2}'[t] ==$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4.5 \times 10^{-32} t} (1 + 1.04 \times 10^{-8} t)} 1.52999 \times 10^{-12} \left(\frac{0.000015}{\sqrt{1 + 4.5 \times 10^{-32} t}} + \frac{1.04}{1 + 1.04 \times 10^{-8} t} \right)^3$$

$$\left(1 - \frac{3 t}{2000000000} \right)^2 \left(4.08585 \cos[h1[t]] H1[t] \sqrt{1 - 0.958419 H1[t]^2} \right.$$

$$\left. \left(\cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) + \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \left(\frac{\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]} - \sin[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{G2[t]} 0.41474 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \right) -$$

$$4.08585 H1[t] \sqrt{1 - 0.958419 H1[t]^2} \sin[h1[t]]$$

$$\left(\sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \left(-\cos[h2[t]] \sin[g2[t]] - \frac{\cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{G2[t]} 0.41474 \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[g2[t]] \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) +$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} H2[t]}{G2[t]} + \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}}}{G2[t]} \right)$$

$$\left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]]}{G2[t]} + \frac{0.41474 H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]^2} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \\
& \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \right. \\
& \quad \left. \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + 2 \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \right. \\
& \quad \left. \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) \\
& \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]]}{G2[t]} + \frac{0.41474 H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} \right) + \\
& 2 \left(-\cos[h2[t]] \sin[g2[t]] - \frac{\cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \\
& \left. \left(\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] - \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \right] + 2 (1.04339 - H1[t]^2) \\
& \sin[2 h1[t]] \left(\left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin[2 h1[t]] \left(\left(\frac{\cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]} + \cos[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) \right) \\
& \left(-\cos[h2[t]] \sin[g2[t]] - \frac{\cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) + \\
& \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] H2[t] \sin[g2[t]]}{G2[t]^2} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \\
& \left(-\frac{0.41474 \cos[h2[t]] \sin[g2[t]]}{G2[t]} - \frac{0.41474 \cos[g2[t]] H2[t] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} \sin[h2[t]] \right) + \left(\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]^2} - \right. \\
& \quad \left. \cos[h2[t]] \sqrt{1 - \frac{0.172009}{G2[t]^2}} \sqrt{1 - \frac{H2[t]^2}{G2[t]^2}} - \frac{0.41474 \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \\
& \left(-\frac{0.41474 \cos[g2[t]] \cos[h2[t]]}{G2[t]} + \frac{0.41474 H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]^2} \right) + \\
& \left(\frac{\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] H2[t]}{G2[t]} - \sin[g2[t]] \sin[h2[t]] \right) \\
& \left. \left(\cos[g2[t]] \cos[h2[t]] - \frac{H2[t] \sin[g2[t]] \sin[h2[t]]}{G2[t]} \right) \right]
\end{aligned}$$